МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

# ТЕОРИЯ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Учебное пособие по курсу “Теория массового обслуживания”
(специальность 010200 — Прикладная математика)

ВОРОНЕЖ
2004

Утверждено научно-методическим советом факультета прикладной математики, информатики и механики. Протокол № 3 от 23.12.03

Составители: Радченко Т. А., Дылевский А. В.

Методическое пособие подготовлено на кафедре технической кибернетики и автоматического регулирования факультета прикладной математики, информатики и механики Воронежского государственного университета.
Рекомендуется для студентов 4 курса д/о.

## Содержание

### Введение

Теория массового обслуживания (ТМО) в настоящее время широко используется во многих прикладных областях. Данное пособие имеет цель — оказать помощь студентам в овладении теоретическими основами и приобретении элементарных навыков в решении задач по ТМО на ПК.

Первая глава пособия содержит краткие сведения из теории случайных процессов и потоков событий, их применение к анализу типичных систем массового обслуживания с простейшим потоком заявок.

Во второй главе представлены сведения о пакете Mathcad, необходимые для выполнения лабораторных работ по данному курсу.

# Глава 1. Теоретическая часть

## 1. Теория массового обслуживания, ее математический аппарат и приложения

В науке, производстве, практической деятельности человека и даже в быту имеет место спрос на выполнение тех или иных операций (обслуживание). Заявки на обслуживание могут поступать в виде потока, и практически всегда существует ограничение на количество, скорость, качество обслуживающих единиц. Возникает задача синтеза систем (систем массового обслуживания), которые обеспечивали бы обслуживание с учетом случайного характера потока заявок, времени обслуживания и других параметров. Для решения задач анализа и синтеза таких систем разработана теория массового обслуживания.

**Определение 1.** Теория массового обслуживания — прикладная теоретико-вероятностная дисциплина, изучающая случайные процессы в системах обслуживания различного назначения с целью рационального построения и анализа этих систем [2].

Теория массового обслуживания возникла сравнительно недавно. Первые работы по ТМО были выполнены в 20-х годах XX–го века А. Эрлангом и были посвящены расчетам телефонных сетей. Проектирование различных систем связи (в том числе компьютерных сетей, подвижных систем, АТС) и сейчас является основным приложением ТМО. Но современная область приложения ТМО гораздо шире, она включает в себя

- производство (расчет количества оборудования и обслуживающего персонала, требуемой производительность при заданной рентабельности и т.п.);
- экономику и бизнес (расчет числа торговых точек, распределение товаров, финансовых ресурсов с учетом потока клиентов и их потребительской возможности и т.п.);
- сферу обслуживания (создание рентабельных и удобных для клиентов кафе, магазинов, ателье, автозаправочных станций, портов и т.п.)

и многое другое.

Процессы, протекающие в системах массового обслуживания (СМО), носят случайный характер, поэтому ТМО базируется на теории случайных процессов, элементы которой изложены ниже.

## 2. Случайные процессы

**Определение 2.** Пусть для некоторого опыта задано вероятностное пространство $\langle \Omega, A, P \rangle$, где $\Omega$ — пространство элементарных событий, $A$ — алгебра его подмножеств, $P$ — вероятностная мера на $A$. Случайным процессом $\xi(t)$, заданным на данном вероятностном пространстве, называется измеримая функция двух переменных $\xi(t, \omega)$, где $\omega \in \Omega$, а $t$ — действительная переменная ($t \in \mathbb{R}$), которая часто имеет смысл времени [2].

При фиксированном значении $t = t_i$ случайный процесс представляет собой измеримую функцию $\xi_i = \xi_i(\omega)$, т.е. случайную величину.

При фиксированном элементарном событии $\omega_i$ получаем некоторую детерминированную (неслучайную) функцию $x_i(t)$, называемую реализацией (траекторией) случайного процесса.

Случайный процесс можно задавать или как множество реализаций с заданной на нем вероятностной мерой, или как последовательность (упорядоченную совокупность) случайных величин, соответствующих определённым значениям $t$. В последнем случае его можно рассматривать как случайный вектор и задать с помощью многомерных законов распределения.

## 3. Многомерные функции распределения, плотности вероятностей, вероятности случайного процесса

**Определение 3.** Многомерной функцией распределения случайного процесса для фиксированных моментов времени $t_1, t_2, \ldots, t_n$ называется функция $2n$ переменных, определяемая следующим образом:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, t_1, t_2, \ldots, t_n) = \\ = P(\xi(t_1) < x_1, \xi(t_2) < x_2, \ldots, \xi(t_n) < x_n). \quad (1)$$

Для непрерывнозначного процесса можно определить многомерную плотность вероятностей

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n, t_1, t_2, \ldots, t_n) = \frac{\partial^n F(x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_n)}{\partial\, x_1 \ldots \partial x_n}\,. \quad (2)$$

Если случайный процесс дискретного типа (множество возможных значений дискретно), то можно определить многомерные вероятности

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n, t_1, t_2, \ldots, t_n) = \\ = P(\xi(t_1) = x_1, \xi(t_2) = x_2, \ldots, \xi(t_n) = x_n). \quad (3)$$

Случайный процесс считается заданным, если заданы многомерные функции распределения (плотности вероятностей или многомерные вероятности) любой размерности.

*Замечание* 1. Если $t$ изменяется непрерывно, то для полного описания случайного процесса необходимо в многомерных законах распределения (1)–(3) устремить $n$ к бесконечности ($n \to \infty$). Но этот предельный переход представляет определенные математические трудности. Кроме того, работать с многомерными функциями (1)–(3) при конечном, но большом значении $n$ тоже не всегда удобно.

Существуют классы процессов, для полного описания которых достаточно знать двумерные законы распределения. К таким процессам относятся марковский и гауссовский процессы, которые наиболее часто используются в приложениях.

## 4. Условные вероятности и плотности вероятностей

Для процесса дискретного типа можно определить условные вероятности (вероятность того, что в момент времени $t_2$ значение процесса равно $x_2$, если в момент времени $t_1$ оно равнялось $x_1$)

$$P(x_2,t_2|\,x_1,t_1) = \frac{P\left(x_1,x_2,t_1,t_2\right)}{P\left(x_1,t_1\right)}\,. \tag{4}$$

Для непрерывнозначного процесса условные плотности вероятностей имеют вид

$$f(x_2,t_2|\,x_1,t_1) = \frac{f\left(x_1,x_2,t_1,t_2\right)}{f\left(x_1,t_1\right)}\,. \tag{5}$$

В $n$-мерном случае условные вероятности и плотности вероятностей определяются аналогично

$$P(x_n,t_n|\,x_1,\ldots x_{n-1},t_1,\ldots,t_{n-1}) = \frac{P\left(x_1,\ldots x_n,t_1,\ldots,t_n\right)}{P\left(x_1,\ldots,x_{n-1},t_1,\ldots,t_{n-1}\right)}\,,$$
$$f(x_n,t_n|\,x_1,\ldots,x_{n-1},t_1,\ldots,t_{n-1}) = \frac{f\left(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n\right)}{f\left(x_1,\ldots,x_{n-1},t_1,\ldots,t_{n-1}\right)}.$$

*Замечание* 2. Условные вероятности (4) и плотности вероятностей (5) в теории случайных процессов называют переходными.

**Определение 4.** Случайный процесс называется однородным, если условные вероятности или условные плотности вероятностей зависят не от моментов времени, а от разности моментов времени, т.е.

$$\begin{aligned} P(x_2,t_2|\,x_1,t_1) &= P(x_2,x_1,t_2-t_1),\\ f(x_2,t_2|\,x_1,t_1) &= f(x_2,x_1,t_2-t_1). \end{aligned} \tag{6}$$

## 5. Классификация случайных процессов

Как отмечается в [3], строгой классификации случайных процессов нет, поэтому можно говорить лишь о выделении по тому или иному признаку типов процессов, которые не обязательно в своей совокупности исчерпывают всевозможные типы и не являются несовместимыми друг с другом.

Случайные процессы можно классифицировать по

1) характеру реализаций случайных процессов (характеру пространства состояний случайного процесса и параметра $t$);
2) виду закона распределения вероятностей;
3) характеру статистической связи между значениями случайного процесса в различные моменты времени.

Классификация по характеру реализаций:

1. Дискретная последовательность (дискретный процесс с дискретным временем) — это случайный процесс, у которого область определения и область возможных значений реализаций — дискретные множества. Примеры: процессы в цифровых системах связи, компьютерных сетях, цифровой радиоаппаратуре и т.п.

2. Случайная последовательность, или временной ряд (непрерывнозначный процесс с дискретным временем) — это случайный процесс, область возможных значений реализаций которого — непрерывное множество, а область определения — дискретное множество. Примеры: метеорологические наблюдения, телеметрические данные состояния космонавтов и т.п.

3. Дискретные процессы (дискретный процесс с непрерывным временем) — это случайный процесс, множество возможных значений реализаций которого — дискретное множество, а область определения — непрерывное множество. Примеры: число абонентов телефонной станции, разговаривающих по телефону, количество автомобилей на автозаправочной стации и т.п.

4. Непрерывнозначный случайный процесс — это случайный процесс, у которого область возможных значений и область определения — непрерывные множества. Примеры: различные физические, химические, биологические процесс протекающие в природе, организме человека.

*Замечание* 3. Случайные процессы с дискретным множеством возможных значений (типы 1 и 3) называются цепями (последовательно переходят от одного состояния к другому, образуя цепочку состояний).

Если рассматривать классификацию случайных процессов по характеру статистической связи между значениями в отдельные моменты времени, можно выделить наиболее простой и хорошо изученный тип — марковский процесс.

## 6. Марковские случайные процессы

Марковский случайный процесс — такой случайный процесс, эволюция которого после любого фиксированного момента $t$ (в будущем) и до момента $t$ (в прошлом) являются независимыми при известном состоянии в момент $t$ (в настоящем) [2]. Это основное свойство марковского процесса, которое можно математически записать по-разному.

**Определение 5.** Случайный процесс $\xi(t)$ называется марковским, если для любых моментов времени, связанных условием $t_k < t_j < t_i$, справедливо соотношение

$$P(\xi(t_k) < x_k, \xi(t_i) < x_i | \, \xi(t_j) = x_j) = \\ = P(\xi(t_k) < x_k | \, \xi(t_j) = x_j) P(\xi(t_i) < x_i | \, \xi(t_j) = x_j). \quad (7)$$

Для дискретного случайного процесса можно записать

$$P(\xi(t_k) = x_k, \xi(t_i) = x_i | \, \xi(t_j) = x_j) = \\ = P(\xi(t_k) = x_k | \, \xi(t_j) = x_j) P(\xi(t_i) = x_i | \, \xi(t_j) = x_j). \quad (8)$$

Можно дать эквивалентное определение марковского процесса в несколько иной математической форме.

**Определение 6.** Случайный процесс $\xi(t)$ называется марковским, если

$$P(\xi(t_n) < x_n | \, \xi(t_1) = x_1, \ldots, \xi(t_{n-1}) = x_{n-1}) = \\ = P(\xi(t_n) < x_n | \, \xi(t_{n-1}) = x_{n-1}). \quad (9)$$

Для дискретного случайного процесса имеем

$$P(\xi(t_n) = x_n | \, \xi(t_1) = x_1, \ldots, \xi(t_{n-1}) = x_{n-1}) = \\ = P(\xi(t_n) = x_n | \, \xi(t_{n-1}) = x_{n-1}). \quad (10)$$

В обширном классе марковских случайных процессов можно выделить различные типы по характеру реализаций:

1. Дискретная последовательность (цепь Маркова).
2. Случайная (марковская) последовательность.
3. Дискретный случайный процесс (дискретный марковский процесс).
4. Непрерывнозначный случайный процесс (непрерывнозначный марковский процесс).

В теории массового обслуживания наиболее часто используются марковские цепи и дискретные марковские процессы, последние иногда называют марковскими цепями с непрерывным временем.

## 7. Цепи Маркова

**Определение 7.** Цепь Маркова — это марковский случайный процесс с дискретными множествами возможных значений (состояний цепи) $E_1, \ldots, E_n$ и значений аргумента $t_0, t_1, t_2, t_3, \ldots$.

Если число возможных состояний $n$ конечно, то цепь называется конечной.

Вместо значений аргумента можно указывать их номер. Разность между двумя соседними значениями аргумента $t_{k+1} - t_k$ называется шагом.

Цепь Маркова задается множеством значений $(E_1, \ldots, E_n)$ и вероятностями:

1. Начальные вероятности $P_j^0 = P(\xi(0) = E_j)$, которые удовлетворяют условию нормировки $\sum\limits_j P_j^0 = 1$.
2. $P(\xi(n+1) = E_j | \, \xi(n) = E_i)$ — вероятность перехода из одного состояния в другое за один шаг. Если марковская цепь однородна, то $P(\xi(n+1) = E_j | \, \xi(n) = E_i) = P_{ij}$. Условие нормировки $\sum\limits_j P_{ij} = 1$.

3. Вероятность перехода из одного состояния в другое за $k$ шагов $P(\xi(n+k) = E_j | \xi(n) = E_i)$. Если марковская цепь однородна, то $P(\xi(n+k) = E_j | \xi(n) = E_i) = P_{ij}(k)$. Условие нормировки $\sum\limits_j P_{ij}(k) = 1$

4. Вероятность состояния $E_i$ в $k$–й момент времени: $P(\xi(k) = E_j) = P_j(k)$. Условие нормировки $\sum\limits_j P_j(k) = 1$.

Если цепь Маркова конечна, то

- Вероятности состояния в начальный момент времени могут быть представлены в виде вектора-строки $\Pi = \left\{P_j^0\right\}$.
- Вероятности состояний на $k$-том шаге образуют вектор-строку $\Pi(k) = \{P_j(k)\}$.
- Вероятности перехода из одного состояния в другое за один шаг или $k$ шагов для однородной цепи представляются соответственно в виде квадратных матриц: $P = \{P_{ij}\}$ или $P = \{P_{ij}(k)\}$. У этих матриц сумма элементов в каждой строке равна 1: $\sum\limits_j P_{ij} = 1$, $\sum\limits_j P_{ij}(k) = 1$.

## 8. Уравнения Колмогорова-Чепмена

Если цепь Маркова однородна, то вероятность любого состояния в произвольный момент времени можно рассчитать на основе начальных вероятностей и вероятностей перехода.

**Теорема 1.** *Для однородной марковской цепи вероятности перехода из одного состояния в другое удовлетворяют уравнению Колмогорова-Чепмена*

$$P_{ij}(k+l) = \sum_\alpha P_{i\alpha}(k) P_{\alpha j}(l). \tag{11}$$

**Теорема 2.** *Для однородной марковской цепи безусловные вероятности состояний удовлетворяют уравнению Колмогорова-Чепмена*

$$P_j(k+l) = \sum_\alpha P_\alpha(k) P_{\alpha j}(l). \tag{12}$$

Если цепь Маркова конечна, то уравнения (11) и (12) можно переписать в матричном виде

$$P(k+l) = P(k)P(l),$$
$$\Pi(k+l) = \Pi(k)P(l).$$

В частном случае, когда $l = 1$, получим

$$P(k+1) = P(k)P = PP(k), \quad \Pi(k+1) = \Pi(k)P = \Pi(1)P(k).$$

Отсюда нетрудно получить, что

$$P(k) = P^k, \quad \Pi(k) = \Pi P^k\,. \tag{13}$$

Таким образом, задавая вектор начальных вероятностей и матрицу вероятности перехода за один шаг, мы можем по формуле (13) получить вектор вероятностей состояний в произвольный момент времени и матрицу вероятностей перехода за произвольное число шагов.

Если число состояний цепи ограничено, то цепь Маркова удобно представлять в виде графа, вершины которого — возможные состояния. А дуги имеют направление и вес, соответствующие вероятностям перехода из одного состояния в другое за один шаг.

## 9. Классификация состояний марковской цепи

Для удобства обозначим $i$-ое состояние его номером: $E_i = i$.

1. Исходное состояние. Состояние $i$ называется исходным, если $P_j^0 = 0$, $P_i^0 = 0$, $i \neq j$.

2. Поглощающее состояние. Состояние $i$ называется поглощающим, если $P_{ii} = 1$, $P_{ij} = 0$, $i \neq j$. Если цепь Маркова содержит хотя бы одно поглощающее состояние, то такая цепь называется поглощающей.

3. Достижимое состояние. Состояние $j$ называется достижимым из состояния $i$ (обозначение: $i \to j$), если существует такое $m$, что $P_{ij}(m) > 0$.

4. Сообщающееся состояние. Состояние называется сообщающимся (обозначение: $i \leftrightarrow j$), если $i \to j$, $j \to i$.

5. Несущественное состояние. Состояние $i$ называется несущественным, если $\exists j : i \to j,\ j \nrightarrow i$.

   Если из множества всех состояний марковской цепи исключить несущественное, то оставшиеся будут сообщающимися состояниями. Они могут составлять один класс сообщающихся состояний или несколько классов состоящих из сообщающихся внутри класса состояний и имеющие нулевую вероятность перехода из одного класса в другой.

   Если цепь Маркова содержит один неразложимый класс существенных состояний, то такая цепь называется неразложимой.

**Пример 1.** $E = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$,

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Необходимо выделить существенные и несущественные состояния. Состояния 1, 2, 3 — несущественные: $(1, 2, 3) = E^{(N)}$, $(4, 5, 6) = E^{(S)}$. Граф состояний данной цепи изображен на рис. 1.

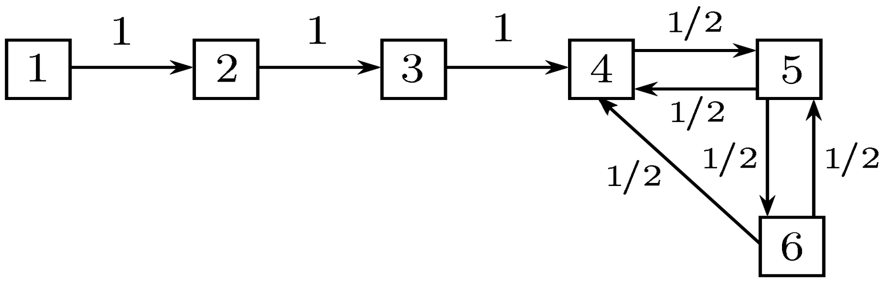


Рис. 1.

**Пример 2.** $E = (1, 2, 3, 4, 5)$,

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

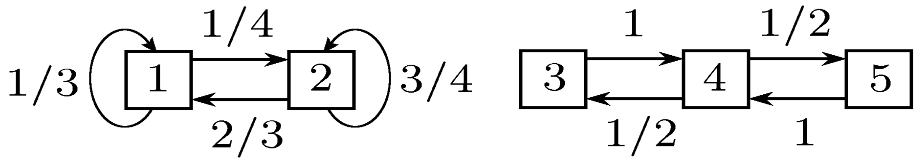


Рис. 2.

$E^{(1)} = (1, 2)$, $E^{(2)} = (3, 4, 5)$ — два класса существенных состояний (см. рис. 2).

Если цепь состоит из нескольких классов существенных по отдельности, то каждый класс анализируется в отдельности.

6. Периодическое состояние. Состояние $i$ называется периодическим с периодом $d_i$ , если возвращение в это состояние возможно за число шагов кратное $d_i$, $P_{ii}(m) > 0$, $m = kd_i$.

7. Апериодическое состояние. Состояние, для которого $d_i = 1$.

**Пример 3.** Пусть марковская цепь имеет состояния $E = (1, 2, 3, 4)$,

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Граф данной цепи представлен на рис. 3. Все состояния существен-

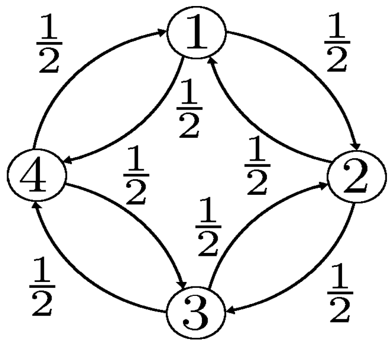


Рис. 3.

ные, поскольку $P_{ii}(n) > 0$, $n = 2m$, и имеют один и тот же период равный двум $d_i = 2$. Рассматриваемая цепь имеет особенность: если выделить два подкласса $C_0 = (1, 2)$ и $C_1 = (3, 4)$, то за один шаг цепь переходит из одного класса состояний, в какое-либо состояние другого класса. $C_0$, $C_1$ — циклические подклассы.

***Теорема 3.*** *Для конечной марковской цепи, состоящей из одного неразложимого класса существенных состояний, периоды всех состояний одинаковы:* $d_i = d\ \forall i$.

*Доказательство.* Пусть $i$ и $j$ — произвольные состояния марковской цепи. Предположим противное: период состояния $i - d_i$ , а $j - d_j$. Так как $i$ и $j$ — существенные состояния, то найдутся такие $k$ и $l$, что $P_{ij}(k) > 0$, $P_{ji}(l) > 0$,

$$P_{ii}(k+l) = \sum_{\alpha} P_{i\alpha}(k) P_{\alpha j}(l) \geqslant P_{ij}(k) P_{ji}(l) > 0. \tag{17}$$

Отсюда следует, что $k + l$ делится на $d_i$. Поскольку период состояний $j - d_j$, то существует такое $n$, что $P_{jj}(n) > 0$, $n$ делится на $d_j$. Предположим, что $n$ при этом на $d_i$ не делится, тогда $k + l + n$ тоже не должно делится на $d_i$, но вероятность

$$P_{ii}(k+l+n) \geqslant P_{ij}(k) P_{jj}(n) P_{ji}(l) > 0. \tag{18}$$

Отсюда следует, что наше предположение о том, что $n$ не делится на $d_i$ не верно, а значит $d_j \geqslant d_i$. С помощью аналогичных рассуждений можно показать, что $d_i \geqslant d_j \Rightarrow d_i = d_j = d$, т.е. периоды всех состояний одинаковы. □

## 10. Циклические подклассы и матрица вероятности перехода для периодической цепи

Пусть цепь Маркова состоит из одного класса существенных состояний, период которых (т.е. период цепи) — $d$. Разобьем этот класс на подклассы следующим образом. Выберем некоторые $i$ и к классу $C_0$ отнесем такие состояния $j$, что

$$\begin{aligned}
&C_0 = \{j : P_{ij}(n) > 0,\ n \mod d = 0\}\\
&C_1 = \{j : P_{ij}(n) > 0,\ n \mod d = 1\}\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&C_{d-1} = \{j : P_{ij}(n) > 0,\ n \mod d = d-1\}
\end{aligned} \tag{19}$$

Все состояния, таким образом, будут отнесены, к какому-то подклассу и единственным образом $E = (C_0, C_1, \dots, C_{d-1})$.

Эти подклассы обладают тем свойством, что цепь Маркова за один шаг переходит из одного подкласса в другой, и других переходов быть не может.

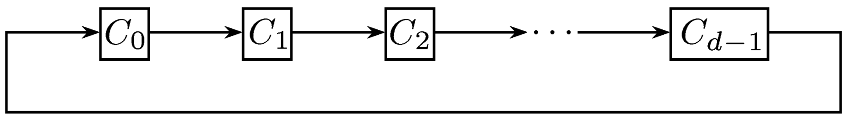

Рис. 4.

Матрица вероятности переходов имеет вид

$$P = \begin{array}{c} \begin{matrix} C_0 & C_1 & \dots & C_{d-1} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} O & \blacksquare & & O \\ O & O & \blacksquare & O \\ & & \dots & \blacksquare \\ \blacksquare & O & O & O \end{pmatrix} \end{array}. \tag{20}$$

Здесь $O$ — блоки, состоящие из нулевых вероятностей, $\blacksquare$ — блоки ненулевых вероятностей.

## 11. Стационарные и эргодические цепи Маркова

**Определение 8.** Цепь Маркова называется стационарной, если для любых $n, l$ выполняется равенство

$$P(\xi(k_1) = E_{i1}, \dots, \xi(k_n) = E_{in}) = \\ = P(\xi(k_1 + l) = E_{i1}, \dots, \xi(k_n + l) = E_{in}). \tag{21}$$

То есть многомерные вероятности не меняются при сдвиге вдоль оси времени (причем сдвиг может быть как вправо, так и влево, т.е. $l < 0, l > 0$). Тогда для вероятности некоторого состояния в $k$–й момент времени:

$$P_i(k) = P(\xi(k) = E_i) = P(\xi(k - k) = E_i) = P(\xi(0) = E_i) = P_i^0.$$

Т.е. для стационарной цепи распределение вероятностей состояний в произвольный момент времени совпадает с распределением вероятностей в начальный момент. Часто стационарный режим устанавливается не сразу, а по истечении какого-то времени, т.е.

$$P_j(k) \to P_j^*,\ k \to \infty, \quad \sum_j P_j^* = 1, \tag{22}$$

где $P_j^*$ — финальные вероятности. Финальные вероятности могут как зависеть от начального распределения вероятностей, так и не зависеть. В последнем случае цепь называется эргодической.

**Определение 9.** Цепь Маркова называется эргодической, если

$$P_{ij}(k) \to P_j^*,\ k \to \infty \quad P_j > 0,\ \sum_j P_j^* = 1. \tag{23}$$

Для конечной эргодической марковской цепи

$$P(k) \to \begin{pmatrix} P^* \\ \vdots \\ P^* \end{pmatrix},$$

где $P(k)$ — матрица вероятностей перехода за $k$ шагов, $P^* = \{P_j^*\}$ — вектор финальных вероятностей.

Установить, является ли цепь эргодической можно на основе следующей теоремы.

***Теорема* 4** (Эргодическая теорема)**.** *Если для конечной марковской цепи найдется такое $m_0$, для которого вероятность перехода*

$$P_{ij}(m_0) > 0, \quad \forall i,\ j, \tag{24}$$

*то такая цепь является эргодической, т.е. существуют такие $P_j^*$, что $\lim_{n\to\infty} P_{ij}^*(n) = P_j^*$, $\sum P_j^* = 1$ и все $P_j^* > 0$.*

*Финальные вероятности $P_j^*$ будут удовлетворять системе уравнений Колмогорова*

$$P_j^* = \sum_i P_i^* P_{ij}, \quad \forall i, j. \tag{25}$$

Условие (24) означает, что на шаге $m_0$ матрица вероятности перехода будет состоять из положительных элементов.

**Пример 4.** Пусть цепь Маркова имеет два возможных состояния $E = (1, 2)$. Матрица вероятностей перехода за один шаг имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Определить, является ли данная цепь эргодической.

**Решение.** Нарисуем граф, соответствующий данной цепи (рис. 5). Предположим, что в начальный момент времени цепь находилась в состоянии 1, т.е. вектор начальных вероятностей имеет вид: $\Pi =$

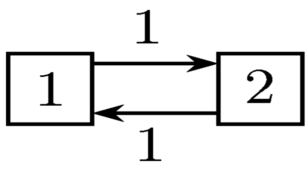


Рис. 5.

$= (1, 0)$. В соответствии с уравнением Колмогорова–Чепмена в матричном виде (13)

$$\Pi(n) = \Pi P^n,$$
$$P^2 = PP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$P^3 = P^2 P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \ldots \text{и т.д.}$$
$$P(2k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ P(2k+1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\Pi(2k) = (1, 0), \ \Pi(2k+1) = (0, 1).$$

Таким образом, наблюдаем периодичность в поведении $P(n)$ и $\Pi(n)$. Цепь не эргодическая.

**Пример 5.** Пусть цепь Маркова имеет два возможных состояния $E = (1, 2)$. Матрица вероятностей перехода за один шаг имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Является ли данная цепь эргодической?

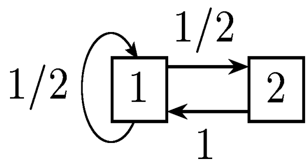


Рис. 6.

**Решение.** Граф состояний данной цепи представлена на рис. 6. Найдем матрицу вероятности перехода за два шага

$$P(2) = PP = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Так как при $m_0 = 2$ матрица вероятностей перехода $P(m_0)$ состоит из положительных элементов, то, опираясь на эргодическую теорему, можно заключить, что цепь эргодическая.

Используем систему (25) для определения $P_i^*$

$$\begin{cases} P_1^* = P_1^* \cdot 1/2 + P_2^* \cdot 1, \\ P_2^* = P_1^* \cdot 1/2 + P_2^* \cdot 0. \end{cases}$$

В системе уравнений Колмогорова одно из уравнений необходимо заменить условием нормировки. Заменим первое уравнение

$$\begin{cases} P_1^* + P_2^* = 1 \\ P_2^* = P_1^* \cdot 1/2 \end{cases} \Rightarrow P_2^* + P_1^* = 1.$$

$$P_2^* = 1/3, \quad P_1^* = 2/3.$$

**Самостоятельно.** Убедиться непосредственным расчетом, что вектор $\Pi(n) \to (2/3, 1/3)$, $n \to \infty$ независимо от начального распределения вероятностей.

## 12. Дискретные марковские процессы (цепи Маркова с непрерывным временем)

Так же как и цепи Маркова с дискретным временем цепи Маркова с непрерывным временем задаются множеством своих возможных состояний и вероятностями:

1. Начальными вероятностями

$$P(\xi(0) = j) = P_j^0 = P_j(0), \quad \sum_j P_j^0 = 1.$$

2. Условными вероятностями (вероятностями перехода)

$$P(\xi(t+s) = j \,|\, \xi(s) = i).$$

Для однородного марковского процесса вероятность перехода зависит только от разности моментов времени

$$P(\xi(t+s) = j \,|\, \xi(s) = i) = P_{ij}(t), \quad \sum_j P_{ij}(t) = 1 \;\forall\, t.$$

Здесь $t$ — разность между моментами времени.

Безусловные вероятности и вероятности перехода для однородных марковских цепей с непрерывным временем удовлетворяют следующим уравнениям Колмогорова-Чепмена:

$$P_j(t+s) = \sum_\alpha P_\alpha(s) P_{\alpha j}(t),$$
$$P_{ij}(t+s) = \sum_\alpha P_{i\alpha}(s) P_{\alpha j}(t).$$

Частный случай уравнений Колмогорова-Чепмена ($s = 0$)

$$P_j(t) = \sum_\alpha P_\alpha(0) P_{\alpha j}(t).$$

Таким образом, для того, чтобы описать однородную марковскую цепь в некоторый момент времени, достаточно знать распределение начальных вероятностей и вероятностей перехода за соответствующий интервал времени.

## 13. Уравнения Колмогорова

Вероятности состояний как функции времени и вероятности перехода как функции интервала времени можно найти на основе дифференциальных уравнений Колмогорова.

Пусть $P_{ij}(t)$ и $P_j(t)$ — дифференцируемые функции. И пусть выполняются следующие условия:

1)

$$P_{ij}(0) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

2)

$$P_{ij}(\Delta t) = \begin{cases} \lambda_{ij}\Delta t, & i \neq j, \\ 1 - \lambda_i \Delta t, & i = j, \end{cases} \tag{26}$$

где $\lambda_{ij}$ — интенсивность (плотность) перехода из состояния $i$ в состояние $j$, $\lambda_i$ — плотность выхода из состояния $i$, $\Delta t$ — бесконечно малый интервал времени.

Условие 2 говорит о том, что за бесконечно малый интервал времени вероятность остаться в том же состоянии по порядку величины больше вероятности перейти в другое состояние. Из условия нормировки

$$\sum_j P_{ij}(\Delta t) = \sum_{j\neq i} \lambda_{ij}\Delta t + 1 - \lambda_i \Delta t = 1$$

следует

$$\lambda_i = \sum_{j\neq i} \lambda_{ij}. \tag{27}$$

Обозначим

$$\lambda_{ii} = -\sum_{j\neq i} \lambda_{ij} = -\lambda_i\,. \tag{28}$$

Тогда формулу (27) можем переписать следующим образом:

$$\sum_j \lambda_{ij} = 0.$$

***Теорема 5.*** *Для однородного марковского процесса с дискретным множеством возможных состояний при выполнении условия* (26) *переходные вероятности удовлетворяют системе дифференциальных уравнений Колмогорова*

$$\frac{dP_{ij}(t)}{dt} = \sum_\alpha \lambda_{i\alpha} P_{\alpha j}(t) \quad \forall\, i,\, j, \tag{29}$$

*или*

$$\frac{dP_{ij}(t)}{dt} = \sum_\alpha P_{i\alpha}(t)\lambda_{\alpha j} \quad \forall\, i, j. \tag{30}$$

Уравнения (29) — прямые уравнения Колмогорова, (30) — обратные уравнения.

***Теорема 6.*** *Для однородного марковского процесса, переходные вероятности которого удовлетворяют условию* (26)*, а* $P_j(t)$ *— дифференцируемые функции, справедлива следующая система дифференциальных уравнений для безусловных вероятностей:*

$$\frac{dP_j(t)}{dt} = \sum_\alpha P_\alpha(t)\lambda_{\alpha j} \quad \forall\, j. \tag{31}$$

*Замечание* 4. Системы уравнений (29)–(31) необходимо решать с использованием начальных условий. Для вероятностей перехода используется условие 1.

Для безусловных вероятностей начальные условия определяются конкретной задачей.

*Замечание* 5. Уравнения Колмогорова необходимо дополнить условием нормировки:

$$\sum_{\alpha} P_{i\alpha}(t) = 1 \text{— для условных вероятностей,}$$
$$\sum_{\alpha} P_{\alpha}(t) = 1 \text{— для безусловных вероятностей.}$$

При этом одно из дифференциальных уравнений из системы исключается. Учитывая (27), (28), уравнения Колмогорова для безусловных и условных вероятностей можно переписать следующим образом:

$$\frac{dP_j(t)}{dt} = \sum_{\alpha \neq j} P_{\alpha}(t)\lambda_{\alpha j} - P_j(t) \sum_{\alpha \neq j} \lambda_{j\alpha} \quad \forall\, j, \tag{32}$$

$$\frac{dP_{ij}(t)}{dt} = \sum_{\alpha \neq j} P_{i\alpha}(t)\lambda_{\alpha j} - P_{ij}(t) \sum_{\alpha \neq j} \lambda_{j\alpha} \quad \forall\, i,\, j. \tag{33}$$

Представления (32) и (33) удобны для составления дифференциальных уравнений, опираясь на соответствующий граф. Все состояния случайного процесса следует представить в виде вершин графа, а дуги снабдить весами, соответствующими интенсивностям перехода из одного состояния в другое. При этом, если составляются уравнения для $j$-го состояния или для перехода в $j$-е состояние, то справа со знаком «+» берутся слагаемые, соответствующие интенсивности перехода в это состояние, и со знаком «-» — слагаемые, содержащие интенсивности выхода из этого состояния.

**Пример 6.** Пусть случайный процесс имеет два состояния: 0 и 1; $\lambda_{01} = \nu_0$, $\lambda_{10} = \nu_1$. Начальные вероятности: $P_0(0) = 1$, $P_1(0) = 0$. Необходимо найти $P_j(t)$ и $P_{ij}(t)$.

**Решение.** Граф состояний данной цепи представлен на рис. 7. Составим систему уравнений Колмогорова для безусловных вероятностей

$$\begin{cases} \dfrac{dP_0(t)}{dt} = P_1(t)\nu_1 - P_0(t)\nu_0, \\ P_0(t) + P_1(t) = 1. \end{cases} \tag{34}$$

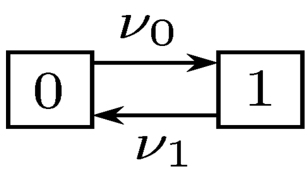


Рис. 7.

Решая данную систему с учетом начальных условий, получаем

$$
\begin{aligned}
&P_0(t) = \frac{\nu_0}{\nu_0+\nu_1} e^{-(\nu_0+\nu_1)t} + \frac{\nu_1}{\nu_0+\nu_1}\,,\\
&P_1(t) = \frac{\nu_0}{\nu_0+\nu_1} (1 - e^{-(\nu_0+\nu_1)t})\,,
\end{aligned}
\tag{35}
$$

при

$$
t \to \infty \quad P_0(t) \to P_0^* = \frac{\nu_0}{\nu_0+\nu_1}\,, \quad P_1(t) \to P_1^* = \frac{\nu_1}{\nu_0+\nu_1}\,.
$$

Таким образом, вероятности состояния рассматриваемого процесса с течением времени сходятся к некоторым финальным вероятностям, процесс становится стационарным.

Аналогично можно записать и решить уравнения для вероятности перехода

$$
\begin{cases}
\dfrac{dP_{00}(t)}{dt} = P_{01}(t)\nu_1 - P_{00}(t)\nu_0,\\
P_{00}(t) + P_{01}(t) = 1,
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{dP_{11}(t)}{dt} = P_{10}(t)\nu_0 - P_{11}(t)\nu_1,\\
P_{10}(t) + P_{11}(t) = 1.
\end{cases}
$$

Следует еще раз отметить, что здесь переменная $t$ имеет смысл интервала времени. Мгновенно, т.е. за нулевой интервал времени невозможно перейти из одного состояния в другое, потому в качестве начальных условии естественно взять значения

$$
P_{00}(0) = P_{11}(0) = 1,\ P_{01}(0) = P_{10}(0) = 0.
$$

Системы уравнений для условных вероятностей с точностью до обозначений совпадают с уже решенной системой для безусловной вероятности. Можно сразу записать решение

$$P_{00}(t) = \frac{\nu_0}{\nu_0+\nu_1}e^{-(\nu_0+\nu_1)t} + \frac{\nu_1}{\nu_0+\nu_1}\,,$$
$$P_{11}(t) = \frac{\nu_1}{\nu_0+\nu_1}e^{-(\nu_0+\nu_1)t} + \frac{\nu_0}{\nu_0+\nu_1}\,,$$
$$P_{01}(t) = \frac{\nu_0}{\nu_0+\nu_1}(1-e^{-(\nu_0+\nu_1)t})\,,$$
$$P_{10}(t) = \frac{\nu_1}{\nu_0+\nu_1}(1-e^{-(\nu_0+\nu_1)t})\,.$$

Устремляя $t \to \infty$, получим

$$P_{00}(t) \to P_0^*, \quad P_{10}(t) \to P_0^*, \quad P_0^* = \frac{\nu_1}{\nu_0+\nu_1},$$
$$P_{11}(t) \to P_1^*, \quad P_{01}(t) \to P_1^*, \quad P_1^* = \frac{\nu_0}{\nu_0+\nu_1}.$$

Из приведенных формул видна следующая особенность рассматриваемого процесса: вероятность перехода в состояние $j$ за очень большой интервал времени стремится к стационарной вероятности, не зависящей от того, в каком состоянии процесс находился в начальный момент времени. Это — свойство эргодичности.

**Определение 10.** Случайный процесс, у которого

$$\lim_{t\to\infty} P_{ij}(t) = P_j^*, \quad P_j^* > 0, \quad \sum_j P_j^* = 1,$$

называется эргодическим.

Стационарное распределение вероятностей удовлетворяет условию

$$\frac{dP_j^*(t)}{dt} = 0 \quad \forall\, j.$$

Если положить левые части уравнений Колмогорова (32) равными нулю, то получим систему алгебраических уравнений для стационарного распределения вероятностей

$$\sum_{\alpha\neq j} P_\alpha^*\lambda_{\alpha j} - P_j^*\sum_{\alpha\neq j}\lambda_{j\alpha} = 0 \quad \forall\, j.$$

Для того чтобы решение такой системы представляло собой распределение вероятностей, ее нужно дополнять условием нормировки, а одно из уравнений убрать.

**Пример 7.** Запишем и решим систему алгебраических уравнений для стационарных вероятностей рассмотренного выше процесса

$$\begin{cases} \nu_1 P_1^* - P_0^* \nu_0 = 0, \\ P_0^* + P_1^* = 1 \Rightarrow P_1^* = 1 - P_0^*. \end{cases}$$

$$\nu_1(1 - P_0^*) - P_0^* \nu_0 = 0,$$

$$P_0^* = \frac{\nu_1}{\nu_0 + \nu_1}; \quad P_1^* = \frac{\nu_0}{\nu_0 + \nu_1}.$$

## 14. Случайный поток событий

**Определение 11.** Случайный поток событий — это последовательность однотипных событий, появляющихся в случайные моменты времени.

Случайный поток событий можно представить на оси $t$ в виде точек соответствующих появлению этих событий. Обозначим интервал времени между двумя следующими друг за другом событиями $\tau_i = t_i - t_{i-1}$. Здесь $t_i$ — момент появления $i$–го события.

## 15. Классификация потоков событий

**Определение 12.** Если совместная плотность $f(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)$ для любого $n$ инвариантна относительно сдвига вдоль оси времени $t$, то такой поток событий называется стационарным.

**Определение 13.** Если $\tau_i$ — независимые случайные величины, то такой поток событий называется потоком без последействия.

**Определение 14.** Если все $\tau_i$ имеют одинаковые распределения, то поток называется однородным.

**Определение 15.** Случайный поток, у которого вероятность появления более одного события за бесконечно малый интервал времени есть величина бесконечно малая, называется ординарным.

## 16. Пуассоновский поток событий

**Определение 16.** Ординарный поток событий без последействия называется пуассоновским потоком событий.

**Определение 17.** Стационарный пуассоновский поток называется простейшим.

## 17. Пуассоновский случайный процесс

**Определение 18.** Пуассоновским случайным процессом $\xi(t)$ называется дискретный марковский случайный процесс, представляющий из себя число появлений событий из пуассоновского потока за время $[0, t]$.

Значения, которые может принимать этот процесс $E = (0, 1, \ldots)$. Вероятности перехода для данного процесса удовлетворяют условиям

$$
\begin{aligned}
&P_{i,j}(t) = 0,\ j < i,\\
&\left.\begin{aligned}
&P_{j-1,j}(\Delta t) = \nu\Delta t,\\
&P_{j,j}(\Delta t) = 1 - \nu\Delta t,\\
&P_{i,j}(\Delta t) = 0,\ j - i > 1,
\end{aligned}\right\}\text{— условия ординарности}\\
&P_{i,j}(0) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 0, & i \neq j,\\ 1, & i = j,\end{cases}\\
&P_j(0) = \begin{cases} 1, & j = 0,\\ 0, & j \neq 0.\end{cases}
\end{aligned}
\tag{36}
$$

Найдем распределение вероятностей состояний и вероятностей перехода для пуассоновского процесса $P_j(t)$, $P_{i,j}(t)$. Нарисуем граф,

$$\boxed{0} \xrightarrow{\nu} \boxed{1} \xrightarrow{\nu} \cdots \xrightarrow{\nu} \boxed{j-1} \xrightarrow{\nu} \boxed{j} \xrightarrow{\nu} \boxed{j+1} \xrightarrow{\nu} \cdots$$

Рис. 8.

соответствующий рассматриваемому случайному процессу (рис. 8). Запишем систему дифференциальных уравнений Колмогорова для $P_j(t)$

$$
\begin{cases}
\dfrac{dP_j(t)}{dt} = \nu P_{j-1}(t) - \nu P_j(t), \quad j > 0,\\
\dfrac{dP_0(t)}{dt} = -\nu P_0(t).
\end{cases}
\tag{37}
$$

Решение системы уравнений (37) при начальных условиях (36) имеет вид

$$P_j(t) = \frac{(\nu t)^j}{j!} e^{-\nu t}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots \tag{38}$$

Рассмотрим аналогичные уравнения для вероятностей перехода

$$\begin{cases} \dfrac{dP_{ij}(t)}{dt} = \nu P_{i,j-1}(t) - \nu P_{ij}(t), \\ \dfrac{dP_{i0}(t)}{dt} = -\nu P_{i0}(t). \end{cases}$$

Решая эту систему аналогично предыдущей, имеем

$$P_{i,j}(t) = \frac{(\nu t)^{j-i}}{(j-i)!} e^{-\nu t}, \quad j \geqslant i, \ i, j = 0, 1, 2, \ldots . \tag{39}$$

*Замечание* 6. Для вероятностей перехода (39) переменная $t$ имеет смысл интервала времени, за который процесс переходит из одного состояние в иное.

Обозначим $k = j - i$ — число событий из пуассоновского потока, которые появлялись за интервал времени $t$, а $P(k, t)$ — вероятность появления $k$ событий за интервал времени $t$. Из (39) следует

$$P(k, t) = \frac{(\nu t)^k}{k!} e^{-\nu t}.$$

Среднее число событий, появившихся за интервал времени $t$, можно вычислить по формуле для математического ожидания дискретной случайной величины

$$\sum_{k=0}^{\infty} kP(k, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k(\nu t)^k}{k!} e^{-\nu t} = \nu t e^{-\nu t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\nu t)^{k-1}}{(k-1)!} = \nu t e^{-\nu t} e^{\nu t} = \nu t,$$

тогда $\nu$ — среднее число событий, которые проявляются за единичный интервал времени (интенсивность пуассоновского потока). Найдем, используя (39), функцию распределения для $\tau$ — интервала между моментами появления соседних событий

$$F_\tau(t) = P(\tau < t) = 1 - P(\tau \geqslant t) = 1 - P(0, t) = 1 - e^{-\nu t}.$$

*Замечание* 7. Пуассоновский случайный процесс не является стационарным, даже когда пуассоновский поток, порождающий этот процесс, является стационарным ($\nu = \mathrm{const}$). Действительно,

$$\lim_{t \to \infty} P_j(t) = \lim_{t \to \infty} \frac{(\nu t)^j}{j!} e^{-\nu t} = 0.$$

*Замечание* 8. Если пуассоновский поток не стационарный, т.е. его интенсивность меняется с течением времени $\nu = \nu(t)$, то среднее число событий, появившихся за интервал времени $t$, подсчитывается по формуле $\int\limits_0^t \nu(x)\,dx$. Расчет $P_j(t)$ можно в этом случае производить по формуле (38), где вместо $\nu t$ следует использовать $\int\limits_0^t \nu(x)\,dx$.

## 18. Системы массового обслуживания

**Определение 19.** Системы массового обслуживания — это системы, предназначенные для обслуживания случайного потока заявок.

Система массового обслуживания включает в себя:

1. Входной поток заявок.
2. Каналы обслуживания (один или несколько, с одинаковыми параметрами обслуживания или разными).
3. Очередь на обслуживание (конечной или бесконечной длины). Очередь может отсутствовать.
4. Выходные потоки заявок (обслуженных или получивших отказ).

Процесс продвижения заявок в СМО определяется дисциплиной ожидания и дисциплиной обслуживания. Системы массового обслуживания могут быть замкнутыми или разомкнутыми. В разомкнутых СМО источник заявок находится вне системы, и интенсивность поступления заявок не зависит от состояния СМО. В замкнутых СМО источник заявок находится внутри системы, и интенсивность поступления заявок зависит от состояния системы.

**Основные параметры систем массового обслуживания:**

1. Параметры входного потока заявок (тип потока, его интенсивность).
2. Количество каналов и интенсивность обслуживания в них.
3. Количество мест в очереди (максимально возможная длина очереди).

4. Дисциплина ожидания и дисциплина обслуживания (наличие приоритетных заявок, порядок ожидания и обслуживания).

**Основные характеристики систем массового обслуживания:**

1. Вероятность обслуживания заявки.
2. Вероятность отказа в обслуживании.
3. Среднее число каналов, занятых обслуживанием.
4. Среднее число занятых мест в очереди.
5. Среднее время пребывания заявки в СМО.
6. Среднее время занятости и простоя канала обслуживания и др.

Рассмотрим основные типы систем массового обслуживания с простейшим потоком заявок, относящиеся к классическим системам массового обслуживания.

## 19. Одноканальная система массового обслуживания с отказами

**Постановка задачи.** На систему обслуживания, имеющую один канал обслуживания, поступает пуассоновский поток заявок с интенсивностью $\lambda$. Система может находиться в одном из двух состояний: 0 — канал свободен и 1 — канал занят. Если канал занят, заявка получает отказ в обслуживании, если свободен — принимается к обслуживанию. Время обслуживания заявки $\tau$ — случайная величина, распределенная по показательному закону с параметром $\mu$. Окончание обслуживания можно рассматривать как появление на выходе системы обслуженной заявки. Таким образом, обслуженные заявки образуют пуассоновский поток событий с интенсивностью $\mu$.

Поведение такой системы массового обслуживания можно описать марковским случайным процессом $\xi(t)$, представляющим собой число заявок, находящихся в системе (для рассматриваемой системы число заявок в системе совпадает с числом каналов занятых обслуживанием). Возможные состояния этого процесса $E = (0, 1)$. Найдем вероятности этих состояний в произвольный момент времени, и характеристики рассматриваемой СМО при $t \to \infty$.

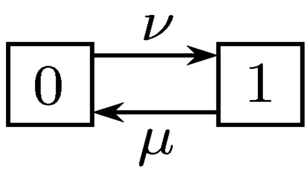


Рис. 9.

Граф, соответствующий рассматриваемому процессу, представлен на рис. 9.

Запишем систему уравнений Колмогорова для вероятностей состояний с учетом условия нормировки:

$$\begin{cases} \dfrac{dP_0(t)}{dt} = \mu P_1(t) - \lambda P_0(t), \\ P_0(t) + P_1(t) = 1. \end{cases} \tag{40}$$

Предполагая, что в начальный момент времени в системе не было заявки, запишем начальные условия так $P_0(0) = 1$, $P_1(0) = 0$.

Система дифференциальных уравнений (40) с такими начальными условиями имеет решение (см. решение системы (34)):

$$P_0(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t} + \frac{\mu}{\lambda+\mu},$$
$$P_1(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\big(1 - e^{-(\lambda+\mu)t}\big).$$

При $t \to \infty$ устанавливается стационарное распределение вероятностей

$$P_0(t) \to P_0 = \frac{\mu}{\lambda+\mu}, \quad P_1(t) \to P_1 = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}.$$

Стационарное распределение можно получить, решая систему алгебраических уравнений, которая получается из системы дифференциальных уравнений (40), если положить $P_i(t) = P_i$, $\frac{dP_i(t)}{dt} = 0$.

## 20. Характеристики одноканальной системы массового обслуживания с отказами

В стационарном режиме одноканальная СМО с отказами имеет следующие характеристики:

1. Вероятность обслуживания заявки — это вероятность того, что канал обслуживания свободен

$$P_{\text{обсл}} = P_0 = \frac{\mu}{\lambda+\mu}.$$

2. Вероятность отказа в обслуживании
$$P_{\text{отк}} = 1 - P_{\text{обсл}} = P_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.$$

3. Среднее время обслуживания заявки
$$\tau_{\text{ср}} = \int\limits_0^{\infty} \tau f(\tau) d\,\tau = \int\limits_0^{\infty} \tau \exp(-\mu\tau)\, d\tau = \frac{1}{\mu}\,.$$

   Здесь $f(\tau) = \exp(-\mu\tau)$ — плотность вероятностей времени обслуживания.

   Для одноканальной системы массового обслуживания с отказами среднее время обслуживания совпадает со средним временем пребывания заявки в СМО и средним временем занятости канала.

4. Среднее число каналов занятых обслуживанием
$$\overline{k} = 0 \cdot P_0 + 1 \cdot P_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.$$

   Среднее число каналов, занятых обслуживанием, можно рассчитать иначе $P_{\text{обсл}} = \dfrac{\overline{k}\mu}{\lambda}$. Здесь $\overline{k}\mu$ — среднее число обслуженных в единицу временя заявок, $\lambda$ — среднее число заявок, поступающих в единицу времени.

Введем обозначение $\alpha = \frac{\lambda}{\mu}$ — приведенная интенсивность потока заявок (среднее число заявок, поступающих за среднее время обслуживания). Тогда среднее число каналов занятых обслуживанием можно записать как: $\overline{k} = \alpha P_{\text{обсл}}$.

## 21. Система параллельного обслуживания ($n$-канальная система массового обслуживания) с отказами

**Постановка задачи.** На систему обслуживания, имеющую $n$ каналов обслуживания, поступает пуассоновский поток заявок с интенсивностью $\lambda$. Если все каналы заняты, заявка получает отказ в обслуживании, если хотя бы один канал свободен, принимается к обслуживанию. Время обслуживания заявки $\tau$ — случайная величина, распределенная по показательному закону с параметром $\mu$. Окончание обслуживания можно рассматривать как появление на выходе системы обслуженной заявки. Таким образом, обслуженные отдельными каналами заявки образуют пуассоновский поток событий с интенсивностью $\mu$.

Поведение такой системы массового обслуживания можно описать марковским случайным процессом $\xi(t)$, представляющим собой число заявок, находящихся в системе (для рассматриваемой системы оно совпадает с числом каналов занятых обслуживанием). Возможные состояния этого процесса $E = (0, 1, \ldots, n)$. Найдем характеристики рассматриваемой СМО в стационарном режиме.

Граф, соответствующий рассматриваемому процессу представлен на рис. 10.

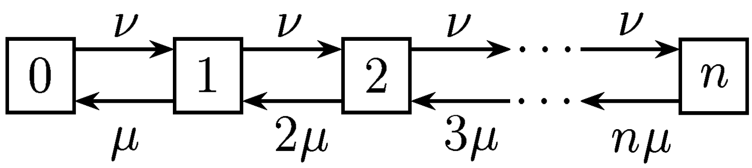


Рис. 10.

Система уравнений для стационарного распределения вероятностей имеет вид

$$\begin{cases} \mu P_1 - \lambda P_0 = 0, \\ \lambda P_{j-1} + (j+1)P_{j+1} - (\lambda + j\mu)P_j = 0, \quad 0 < j < n, \\ \sum\limits_{j=1}^{n} P_j = 1. \end{cases} \tag{41}$$

Решение системы (41) дает стационарное распределения числа заявок в многоканальной системе с отказами

$$P_j = \frac{\frac{1}{j!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j}{\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}, \quad j = 0, 1, \ldots n. \tag{42}$$

Формула (42) соответствует закону распределения Эрланга. Обозначив $\alpha = \frac{\lambda}{\mu}$ — среднее число заявок, поступающих в систему за среднее время обслуживание одной заявки в одном канале, перепишем распределение Эрланга (42)

$$P_j = \frac{\frac{\alpha^j}{j!}}{\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!}} = \frac{P(j,\alpha)}{R(n,\alpha)}, \quad j = 0, 1, \dots n. \tag{43}$$

Здесь $P(j,\alpha)$, $R(n,\alpha)$ — распределение вероятностей и функция распределения пуассоновского закона.

**Характеристики многоканальной системы массового обслуживания с отказами в стационарном режиме:**

1. Вероятность отказа в обслуживании (вероятность того, что все каналы заняты):
$$P_{\text{отк}} = P_n = \frac{P(n,\alpha)}{R(n,\alpha)}.$$

2. Вероятность обслуживания заявки (относительная пропускная способность системы):
$$P_{\text{обсл}} = 1 - P_{\text{отк}} = \frac{R(n-1,\alpha)}{R(n,\alpha)}.$$
Вероятность обслуживания можно получить другим образом:
$$P_{\text{обсл}} = \frac{\mu\overline{k}}{\lambda}. \tag{44}$$
Здесь $\overline{k}$ — среднее число каналов, занятых обслуживанием, $\mu\overline{k}$ — средняя число заявок, обслуженных в единицу времени (абсолютная пропускная способность системы), $\lambda$ — среднее число заявок, поступающих в единицу времени.

3. Среднее время обслуживания заявки в отдельном канале:
$$\tau_{\text{ср}} = \frac{1}{\mu}.$$

4. Среднее число каналов, занятых обслуживанием, —
$$\overline{k} = \sum_{j=0}^{n} jP_j = \alpha\frac{R(n-1,\alpha)}{R(n,\alpha)}.$$
Среднее число каналов, занятых обслуживанием, можно рассчитать, используя формулу (44):
$$\overline{k} = \alpha P_{\text{обсл}}.$$

## 22. Многоканальная система с отказами и полной взаимопомощью между каналами

**Постановка задачи.** На систему обслуживания, имеющую $n$ каналов обслуживания, поступает пуассоновский поток заявок с интенсивностью $\lambda$. Интенсивность обслуживания заявки каждым каналом $\mu$. Заявка обслуживается всеми каналами одновременно. После окончания обслуживания все каналы освобождаются. Если вновь прибывшая заявка застает заявку, она тоже принимается к обслуживанию. Часть каналов продолжают обслуживать первую заявку, а остальные — новую. Если в системе уже обслуживается $n$ заявок, то вновь прибывшая заявка получает отказ. Поведение такой системы массового обслуживания можно описать марковским случайным процессом $\xi(t)$, представляющим собой число заявок, находящихся в системе.

Возможные состояния этого процесса $E = (0, 1, \dots, n)$. Найдем характеристики рассматриваемой СМО в стационарном режиме.

Граф, соответствующий рассматриваемому процессу, представлен на рис. 11.

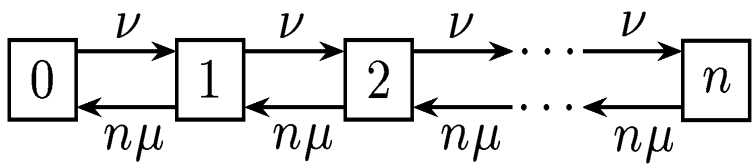


Рис. 11.

Составим систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} n\mu P_1 - \lambda P_0 = 0, \\ \lambda P_{j-1} + n\mu P_{j+1} = 0, \\ \sum\limits_{j=0}^{n} P_j = 1. \end{cases} \tag{45}$$

Решение системы (45) имеет вид

$$P_j = \begin{cases} \chi^j \dfrac{1-\chi}{1-\chi^{n+1}}, & j = 0, 1, \dots, n, \ \chi \neq 1, \\ \dfrac{1}{n+1}, & j = 0, 1, \dots, n, \ \chi = 1. \end{cases}$$

Здесь $\chi = \dfrac{\lambda}{n\mu}$ — среднее число заявок, поступающих в систему за среднее время обслуживания одной заявки всеми каналами.

**Характеристики многоканальной системы массового обслуживания с отказами и полной взаимопомощью между каналами:**

1. Вероятность отказа в обслуживании (вероятность того, что все каналы заняты):
$$P_{\text{отк}} = P_n.$$

2. Вероятность обслуживания заявки (относительная пропускная способность системы):
$$P_{\text{обсл}} = 1 - P_{\text{отк}} = \begin{cases} \dfrac{1-\chi^n}{1-\chi^{n+1}}, & \chi \neq 1, \\ \dfrac{n}{n+1}, & \chi = 1. \end{cases}$$

## 23. Многоканальная СМО с ожиданием (с очередью конечной длины)

**Постановка задачи.** Пусть имеется $n$-канальная СМО, на которую поступает пуассоновский поток заявок с интенсивностью $\lambda$. Если хотя бы один из каналов свободен, то поступившая заявка обслуживается каналом. Если все каналы заняты обслуживанием, то заявка ставится в очередь на обслуживание. Длина очереди — $m$ (число мест в очереди). Если все места в очереди заняты, то заявка получает отказ. Если при обслуживании освобождается канал, то из очереди переходит очередная заявка на обслуживание; все заявки сдвигаются, и вновь поступившая заявка ставится в конец очереди.

Исследуем стационарный режим данной системы, предполагая, что время обслуживания — экспоненциально распределенная случайная величина с параметром $\mu$, т.е. моменты окончания обслуживания заявки в каждом канале могут рассматриваться как моменты наступления событий, представляющие собой пуассоновский поток с интенсивностью $\mu$.

Обозначим через $\xi(t)$ — число заявок в СМО, включая очередь, $E = (0, 1, \ldots, n, n+1, \ldots, n+m)$. Нарисуем граф, соответствующий данной системе (см. рис. 12).

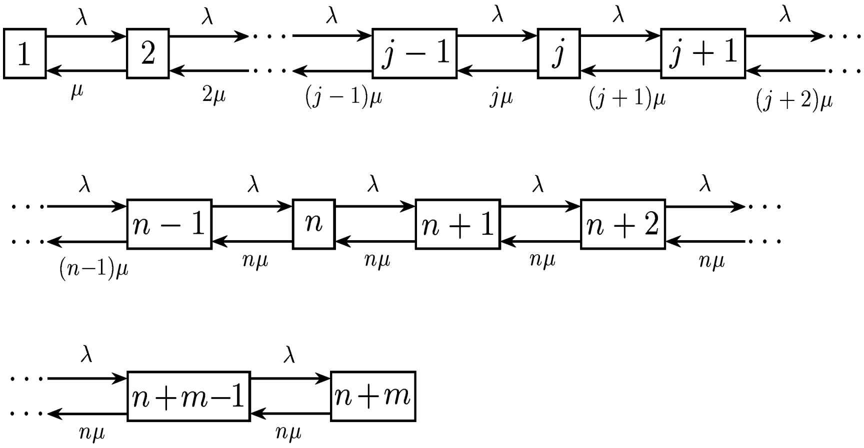


Рис. 12.

Запишем систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \mu P_1 - \lambda P_0 = 0, \\ \lambda P_0 + 2\mu P_2 - (\lambda + \mu) P_1 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda P_{j-1} + (j+1) P_{j+1}\mu - (\lambda + j\mu) P_j = 0, \quad j = \overline{1, n-1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda P_{n+r-1} + n\mu P_{n+r+1} - (\lambda + n\mu) P_{n+r} = 0, \quad r = \overline{1, m-1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda P_{n+m-1} - n\mu P_{n+m} = 0, \\ \sum\limits_{j=0}^{n+m} P_j = 1, \quad j = \overline{0, n+m}. \end{cases}$$

Решение данной системы имеет вид

$$P_0 = \begin{cases} \dfrac{e^{-\alpha}}{R(n,\alpha) + P(n,\alpha)\frac{\chi(1-\chi^m)}{1-\chi}}, & \chi \neq 1, \\ \dfrac{e^{-\alpha}}{R(n,n) + P(n,n)m}, & \chi = 1, \end{cases}$$

$$P_k = \begin{cases} \dfrac{\alpha^k}{k!} P_0, & k = \overline{0, n}, \\ \chi^r P_n, & k = n + r,\ r = \overline{1, m}. \end{cases}$$

Здесь $\chi = \dfrac{\lambda}{n\mu}$, $P(j,\alpha)$, $R(n,\alpha)$ — распределение вероятностей и функция распределения пуассоновского закона, $\alpha = \lambda\mu$.

**Характеристики данной СМО:**

1. $P_{\text{обсл}} = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - P_{n+m} = 1 - \chi^m P_n, \quad P_{\text{обсл}} = \dfrac{\mu\overline{k}}{\lambda}.$

2. $\overline{k} = \alpha P_{\text{обсл}} = \alpha(1 - \chi^m P_n), \quad \overline{k} = \sum\limits_{k=0}^{n} k P_k$, $\overline{k}$ — среднее число каналов, занятых обслуживанием.

3. Вероятность того, что все каналы заняты, т.е. вероятность того, что заявке придется стоять в очереди (вероятность очереди):
$$P_{\text{к.з.}} = \sum_{r=1}^{m} P_{n+r} = \alpha P(n\alpha) \sum_{r=0}^{m} \chi^r.$$

4. Вероятность того, что отдельный канал занят:
$$P_{\text{з}} = \frac{\overline{k}}{n} = \frac{\alpha(1 - \chi^m P_n)}{n}.$$

5. Среднее число заявок, находящихся в очереди:
$$\overline{r} = \sum_{r=1}^{m} r P_{n+r}.$$

6. Среднее время нахождения заявки в очереди:
$$\overline{t}_{\text{оч}} = \frac{\overline{r}}{\lambda}.$$

7. Среднее время нахождения заявки в СМО (включая очередь):
$$\overline{t} = \frac{\overline{r} + \overline{k}}{\lambda}.$$

*Замечание* 9. Из рассмотренной СМО, как частные случаи, можно получить $n$-канальную систему с отказами (положить $m = 0$) и одноканальную систему с очередью (положить $n = 1$).

## 24. СМО с неограниченной очередью

Из рассмотренной выше СМО с очередью конечной длины можно получить СМО с неограниченной очередью, если устремить $m \to \infty$. В такой системе стационарный режим будет наблюдаться только в том случае, когда $\chi = \dfrac{\lambda}{n\mu} < 1$, в противном случае, т.е. когда $\chi = \dfrac{\lambda}{n\mu} > 1$, или $\lambda > n\mu$, вероятность любого состояния при $t \to \infty$ будет стремиться к нулю : $P_{n+r}(t) \to 0$, $t \to \infty$.

Рассмотрим частный случай одноканальной системы с бесконечной очередью ($n = 1$, $m \to \infty$). Будем рассматривать ситуацию $\chi = \dfrac{\lambda}{\mu} < 1$, т.е. $\lambda < \mu$. В этом случае

$$P_k = \alpha^k(1-\alpha) = 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots .$$

**Характеристики данной системы:**

1. Вероятность обслуживания:

$$P_{\text{обсл}} = \sum_{k=1}^{\infty} P_k = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k(1-\alpha) = 1.$$

2. Среднее число заявок, находящихся в очереди:

$$\overline{r} = \sum_{r=1}^{\infty} r P_{r+1} \to \frac{\alpha^2}{1-\alpha}\,.$$

3. Среднее время ожидания заявок в очереди:

$$\overline{t}_{\text{ож}} = \frac{\overline{r}}{\lambda}\,.$$

## 25. Замкнутые системы массового обслуживания

В замкнутой системе массового обслуживания источник заявок находится внутри системы и зависит от состояния системы массового обслуживания. Примером такой системы массового обслуживания может быть группа технических устройств (станков, ЭВМ и т.п.), которые периодически требуют ремонта (наладки). Интенсивность заявок на ремонт (обслуживание) зависит от того, сколько технических устройств в данный момент работает. Обозначим через $m$ — общее число технических устройств, $n$ — количество каналов обслуживания (обычно $m > n$).

Любое техническое устройство в случайный момент времени может выйти из строя. Это означает поступление заявки на обслуживание от одного устройства. Будем считать поток заявок на обслуживание пуассоновским потоком с параметром $\lambda$. Поток заявок от $j$ устройств — пуассоновский с интенсивностью $j\lambda$. Отказавшее устройство может обслуживаться одним из каналов обслуживания. Пусть $\mu$ — интенсивность обслуживания в отдельном канале.

Если к моменту отказа очередного технического устройства все каналы заняты, то заявка на ремонт становится в очередь (ожидает обслуживания). Порядок обслуживания из очереди следующий: та заявка, которая поступила первой, первой и обслужится.

Найдем распределение вероятностей состояний рассматриваемой системы массового обслуживания в стационарном режиме. Пусть $\xi(t)$ — число отказавших технических устройств, является марковским процессом $E = (0, 1, \ldots, m)$. Изобразим граф, соответствующий рассматриваемой системе (см. рис. 13).

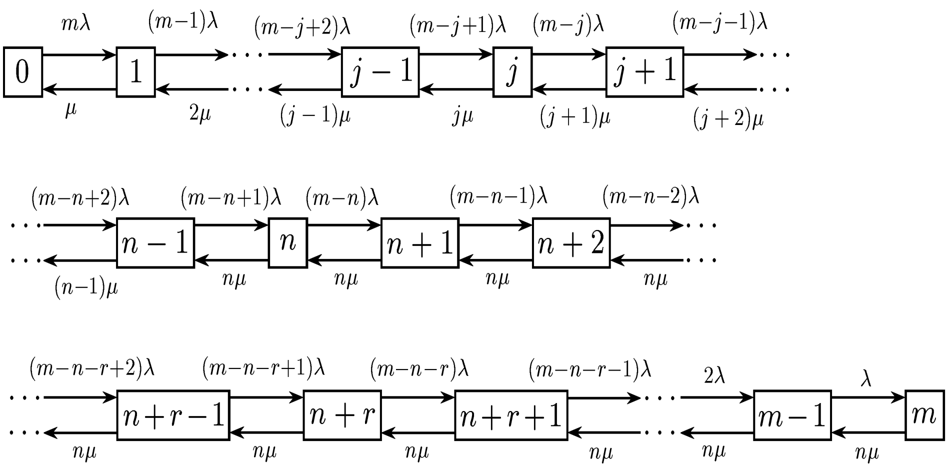


Рис. 13.

Запишем систему алгебраических уравнений

$$
\begin{cases}
\mu P_1 - m\lambda P_0 = 0, \\
(m-j+1)\lambda P_{j-1} + (j+1)\mu P_{j+1} - \\
\; - ((m-j)\lambda + j\mu)P_j = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(m-n-r+1)\lambda P_{n+r-1} + n\mu P_{n+r+1} - \\
\; - ((m-n-r)\lambda + n\mu)P_{n+r} = 0, \quad r = 1, 2, \ldots, m-n, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\sum\limits_{k=0}^{n} P_k + \sum\limits_{r=1}^{m-n} P_{n+r} = 1.
\end{cases}
\qquad (46)
$$

Рекуррентным способом получаем выражения для вероятностей

$$
P_k = \frac{m!}{k!(m-k)!}(\frac{\lambda}{\mu})^k P_0 = C_m^k \alpha^k P_0, \quad k = 0, 1, \ldots, n,
$$
$$
P_{n+r} = \frac{m!}{n^r n!(m-n-r)!}\alpha^{n+r} P_0, \quad r = 1, 2, \ldots, m-n.
$$

Здесь $\alpha = \frac{\lambda}{\mu}$. Введем обозначения: $p = \frac{\alpha}{\alpha+1}$, $q = 1 - p = \frac{1}{\alpha+1}$, $B(m,k,p) = C_m^k p^k q^{m-k}$, $P(m,\alpha) = \frac{\alpha^m}{m!}e^{-\alpha}$, $R(m,\alpha) = \sum\limits_{k=0}^{m} P(k,\alpha)$, $\chi = \frac{n\mu}{\lambda} = \frac{n}{\alpha}$, $R^*(m,n,p) = \sum\limits_{k=0}^{n} B(m,k,p)$.

С учетом введенных обозначений перепишем вероятности состояний (46) в виде

$$
\begin{cases}
P_k = \dfrac{B(m,k,p)}{q^m} P_0\,, \quad k = 0, 1, \ldots, n, \\
P_{n+r} = \dfrac{P(n,m)P(n-m-r,\chi)}{P(0,n)P(m,\chi)}\,, \quad r = 1, 2, \ldots, n-m,
\end{cases}
$$

где

$$
P_0 = \frac{1}{\dfrac{R^*(m,n,p)}{q^m} + \dfrac{P(n,m)P(n-m-r,\chi)}{P(0,n)P(m,\chi)}}\,.
$$

На основе полученных формул выпишем характеристики рассматриваемой системы массового обслуживания:

1. Среднее число технических устройств, находящихся в очереди на обслуживание:
$$\bar{r} = \sum_{r=1}^{m-n} rP_{n+r}\,.$$
2. Среднее число обслуживаемых технических устройств:
$$\bar{k} = \sum_{k=0}^{n} kP_k + n\sum_{n=1}^{m-n} P_{n+r}\,.$$
3. Среднее число неработающих технических устройств: $\bar{l} = \bar{r} + \bar{k}$.
4. Вероятность того, что техническое устройство будет простаивать: $\beta = \dfrac{\bar{l}}{m}$.
5. Вероятность того, что техническое устройство будет работать: $\gamma = 1 - \beta = 1 - \dfrac{\bar{l}}{m}$ — коэффициент использования техники.
6. Среднее число каналов, занятых обслуживанием:
$$\bar{z} = 0P_0 + 1P_1 + \ldots + n(P_n + P_{n+1} + \ldots + P_m).$$
7. Среднее число технических устройств, обслуживаемых в единицу времени (производительность системы массового обслуживания или абсолютная пропускная способность СМО): $\lambda_0 = \bar{z}\mu$.

# Глава 2. Mathcad

В последние годы для проведения различного рода расчетов на компьютере все чаще используются не традиционные языки программирования, а специальные математические пакеты Maple, Mathematica, Mathlab, Mathcad, Gauss и др. Математические пакеты, в особенности Mathcad — самый популярный пакет из вышеперечисленного списка, позволяют специалистам в конкретной предметной области, не вдаваясь в тонкости программирования, реализовать математические модели.

Отметим конкретные преимущества пакета Mathcad:

- математические выражения в среде Mathcad записываются в их общепринятом виде. Текстовый процессор пакета позволяет оформить, например, научную статью, не прибегая к специализированным средствам (текстовые процессоры Word, LaTeX и др.). Кроме того, пакет Mathcad — это полноценное Windows-приложение, поэтому ClipBoard (Буфер Обменов) позволяет перенести фрагменты Mathcad-документа в Word-документ и при необходимости дооформить их;

- в среде Mathcad процесс создания программы идет параллельно с ее отладкой;

- в пакет Mathcad интегрирован довольно мощный математический аппарат, позволяющий решать математические задачи без вызова внешних процедур. Вот неполный перечень вычислительных инструментов, доступных в среде Mathcad:

    1) решение алгебраических уравнений и систем (линейных и нелинейных);
    2) решение систем обыкновенных дифференциальных уравнений (задача Коши и краевая задача);
    3) решение дифференциальных уравнений в частных производных;
    4) работа с векторами и матрицами (линейная алгебра и др.);
    5) поиск максимумов и минимумов функциональных зависимостей;
    6) статистическая обработка данных;

- пакет Mathcad дополнен справочником по основным математическим и физико-химическим формулам и константам, которые можно автоматически переносить в документ;

- в пакет Mathcad интегрированы средства символьной математики, что дает возможность решать математические задачи не только численно, но и аналитически;

- система Mathcad оборудована средствами анимации, что позволяет реализовывать созданные модели не только в статике (числа, таблицы), но и в динамике (анимационные клипы).

Как видно из приведенной выше характеристики, пакет Mathcad обладает большими возможностями для решения самых разнообразных задач. В настоящем пособии пакет Mathcad будет рассмотрен применительно к классу задач, связанному с теорией массового обслуживания.

## 1. Арифметические вычисления

*Для вычисления значений арифметических выражений* в рабочем поле Mathcad следует с помощью клавиатуры (или, нажав на пиктограмму калькулятора в математическом меню Mathcad, набрать выражение, завершающееся знаком “ =”).

**Пример 1.**

$$1 - \frac{3}{5} + 0.2 \cdot 4 = 1.2$$

## 2. Использование формул в Mathcad

*Для набора формул* в Mathcad можно использовать числа, переменные, функции, как стандартные (встроенные), так и определяемые пользователем, а также различные математические операторы (сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень, интегрирования, дифференцирования и т.д.). Набор формул можно осуществлять также с помощью панели математического меню Mathcad.

*Замечание* 1. Имена встроенных функций нечувствительны к шрифту, но чувствительны к регистру (верхнему, нижнему) — их следует печатать в точности, как они приведены в настоящем пособии или документации по Mathcad.

*Для определения переменной* следует после указания ее имени ввести знак присвоения “:=” (нажав клавишу “ :”), после которого вводится алгебраическое (или логическое) выражение, все операнды которого должны быть определены.

Заметим, что знак “:=”действует по полю Mathcad правее и ниже указанного выражения. Если вместо знака “:=” вводить “≡” (клавиша “ ˜ ”), то его действие распространяется по всему полю документа независимо от местоположения рассматриваемого выражения. То есть знак “≡” определяет, в отличие от “:=”, переменную глобально.

*Замечание* 2. Если в документе имеется несколько определений, то, по умолчанию, в Mathcad применяются следующие правила: если переменная используется в правой части глобального определения, то она должна быть определена глобально выше него; из нескольких глобальных определений одной переменной (или функции) действует определение, стоящее ближе к концу документа.

**Пример 2.**

$$\mathtt{x} := 1 \quad \mathtt{y} := 4 \quad \mathtt{z} := \frac{\mathtt{x}+\mathtt{y}}{10} \quad \mathtt{v} := \frac{\mathtt{x}+2\cdot\mathtt{y}}{10}$$

$$\mathtt{z} = 0.5 \quad \mathtt{v} = 0.9$$

*Для определения функции* одного или нескольких переменных требуется задать имя функции, указав в круглых скобках через запятую имена ее аргументов, и правее знака ":=" (или "≡") ввести соответствующее функции арифметическое (или логическое) выражение. При этом операнды выражения, являющиеся аргументами функции, могут предварительно не определяться. После определения функции ее можно использовать в выражении как стандартную (встроенную) функцию Mathcad. Особо отметим, что к моменту вычисления по формуле все переменные в этой формуле должны быть определены.

**Пример 3.**

$\mathtt{f}(\mathtt{x},\mathtt{y}) := \sin(\mathtt{x}) + \mathtt{x}^2 - 2\cdot\mathtt{y}\cdot\cos(\mathtt{x}+\mathtt{y})$ определение функции $\mathtt{f}(\mathtt{x},\mathtt{y})$

$\mathtt{g}(\mathtt{x}) := \mathtt{cos}(\mathtt{x}^2+1) - \mathtt{f}(4,\mathtt{x})$ использование функции $\mathtt{f}(\mathtt{x},\mathtt{y})$ в вычислениях

## 3. Работа с векторами и матрицами

*Для ввода матрицы (или вектора)* требуется проделать следующую последовательность операций

1. Задаем имя матрицы и вводим знак присваивания. Например, для задания матрицы "A"пишем "A:". Получаем "$\mathtt{A} :=$".

2. В панели математического меню Mathcad нажимаем на кнопку с изображением матрицы. После этого на экране дисплея возникает окно работы с матрицами. В этом окне два поля и четыре кнопки.

3. В первом поле следует указать число столбцов создаваемой матрицы, а во втором — число строк (по умолчанию в этих полях записаны тройки — считается, что квадратная матрица порядка 3 самая распространенная).

4. Для создания матрицы щелкаем по кнопке OK (Создать). Две остальные кнопки Insert (Вставить) и Delete (Удалить) предназначены для изменения размеров ранее созданных матриц: заданное в полях число столбцов или (и) строк вставляется (удаляется) правее и ниже отмеченного курсором элемента уже созданной матрицы. Кнопка отменяет Cansel (Отмена) вставку матрицы.

5. После щелчка по кнопке OK справа от выражения появляется набор вакантных мест для ввода информации, обрамленный скобками. Заполнением вакансий завершается формирование матрицы.

Формирование вектора осуществляется аналогично.

Следует отметить второй вариант формирования матриц и векторов без обращения к окну работы с матрицами, а через переменные с индексами, например, $A_{i,j}$, $B_i$. Индекс к имени переменной припечатывается нажатием либо на кнопку $X_n$ на панели математических инструментов, либо на клавишу "[" (открывающаяся квадратная скобка).

*Замечание* 3. Номер первого элемента векторов и матриц хранит переменная ORIGIN. Эта переменная предопределенная: если пользователь не задает ее значение, то по умолчанию ORIGIN=0. Изменить значение системной переменной ORIGIN можно либо в пункте меню Math (подпункт Built-in Variables (Встроенные переменные)), либо через команду присваивания в поле документа Mathcad.

Операции с матрицами и векторами осуществляются по тем же правилам, что и для арифметических выражений (см. Приложение).

**Пример 4.**

| | |
|---|---|
| $\mathtt{ORIGIN} := 1$ | определяем номер первого элемента |
| $\mathtt{A} := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ | формируем матрицу A |
| $\mathtt{B} := \begin{pmatrix} 138 \\ 540 \end{pmatrix}$ | формируем матрицу B |
| $\mathtt{X} := \mathtt{A}^{-1} \cdot \mathtt{B}$ | решаем матричное уравнение $\mathtt{AX} = \mathtt{B}$ |
| $\mathtt{X} = \begin{pmatrix} 63 \\ 75 \end{pmatrix}$ | вывод решения |
| $\mathtt{A} \cdot \mathtt{X} - \mathtt{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ | проверка |

**Пример 5.**

| | |
|---|---|
| $\mathtt{ORIGIN} := 0$ | определяем номер первого элемента |
| $\mathtt{A}_{0,0} := 1 \quad \mathtt{A}_{0,1} := 1$ | формируем матрицу A |
| $\mathtt{A}_{1,0} := 5 \quad \mathtt{A}_{1,1} := 3$ | |
| $\mathtt{B}_0 := 138 \quad \mathtt{B}_1 := 540$ | формируем матрицу B |
| $\mathtt{X} := \mathtt{lsolve}(\mathtt{A}, \mathtt{B})$ | решаем матричное уравнение $\mathtt{AX} = \mathtt{B}$ |
| $\mathtt{X}_0 = 63 \quad \mathtt{X}_1 = 75$ | вывод решения |
| $\mathtt{A}_{0,0} \cdot \mathtt{X}_0 + \mathtt{A}_{0,1} \cdot \mathtt{X}_1 - \mathtt{B}_0 = 0$ | проверка |
| $\mathtt{A}_{1,0} \cdot \mathtt{X}_0 + \mathtt{A}_{1,1} \cdot \mathtt{X}_1 - \mathtt{B}_1 = 0$ | |

## 4. Построение графиков в среде Mathcad

В пакете Mathcad содержится большое количество типов графиков, используемых для визуального отображения различных зависимостей. В данном методическом пособии будут рассмотрены лишь два основных типа: двумерный декартов график (X-Y Plot), иллюстрирующий связь между двумя (одна кривая на графике) или несколькими (две или более кривых) векторами, и график поверхности (Surface Plot).

*Двумерный декартов график* строится в три этапа:
1. Задается вид функций одной переменной.
2. Формируется вектор значений аргумента.
3. Непосредственное построение графика:

a) рисование на экране дисплея заготовки графика — прямоугольника с черными квадратиками у левой и правой сторон; заготовка графика появляется в отмеченном курсоре месте после того, как пользователь нажмет на одну из кнопок математического меню “Графики”;

b) заполнение пользователем двух черных квадратиков заготовки графика именем функции и именем аргумента. В случае, если функций больше одной, то их имена вводятся через запятую. В заготовке есть и другие черные квадратики, определяющие пределы изменений значений аргумента и функций. Эти квадратики можно не заполнять — среда Mathcad по умолчанию заполнит их сама. График появляется на дисплее после вывода курсора из зоны графика (автоматический режим расчетов) или после нажатия клавиши F9 (ручной режим расчетов). Параметры графика (например, толщина и тип линий, вид осей и графика и т.п.) задаются стандартными по умолчанию;

c) если параметры графика, установленные по умолчанию, пользователя не устраивают и он хочет их изменить, то следует двойным щелчком левой клавиши мыши, когда указатель мыши находится в поле графика, вызвать соответствующее меню и произвести необходимые изменения.

*Для задания диапазона изменения переменной* следует руководствоваться следующим правилом:

$\mathtt{x} := \mathtt{x}_1, \mathtt{x}_2 \,..\, \mathtt{x}_n.$

Здесь $\mathtt{x}_1$ — первое значение, $\mathtt{x}_2$ — второе значение и $\mathtt{x}_n$ — последнее значение. Таким образом, шаг изменения от $\mathtt{x}_1$ до $\mathtt{x}_2$ будет $\mathtt{x}_2 - \mathtt{x}_1$. Если же используется запись

$\mathtt{x} := \mathtt{x}_1 \,..\, \mathtt{x}_n,$

то шаг изменения переменной x будет по умолчанию равен 1.

Для ввода “..” следует нажать клавишу “;” или воспользоваться математической панелью меню.

**Пример 6.**

| | |
|---|---|
| $\mathsf{i} := 0 \,..\, 10$ | i принимает значения от 0 до 10 с шагом 1 |
| $\mathsf{j} := -15, -14 \,..\, 12$ | j принимает значения от -15 до 12 с шагом 1 |
| $\mathsf{x} := 2, 2.5 \,..\, 7$ | x принимает значения от 2 до 7 с шагом 0,5. |

**Пример 7.**

$$\mathtt{a} := 1 \quad \mathtt{b} := 2 \quad \mathtt{c} := 20$$

$$\mathtt{x}(\alpha) := \frac{-\mathtt{c}\cdot(\mathtt{a}+\mathtt{b})\cdot\sin(2\cdot\alpha)}{-2\cdot\mathtt{a}}$$

$$\mathtt{y}(\alpha) := \frac{\mathtt{c}\cdot\left[\mathtt{a}-\cos(\alpha)^2\cdot(\mathtt{a}+\mathtt{b})\right]}{-\mathtt{a}}$$

$$\mathtt{z}(\alpha) := (\mathtt{a}+\mathtt{b})\cdot\frac{\mathtt{c}}{\mathtt{a}}\cdot\cos(\alpha)$$

$\alpha := 0.5\cdot\mathtt{deg}, 0.1\,..\,360\cdot\mathtt{deg}$ ($\mathtt{deg}$ — один угловой градус).

## 5. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений

Mathcad имеет ряд встроенных функций, предназначенных для решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Каждая из этих функций предназначена для численного решения дифференциального уравнения. В результате решения получается матрица, содержащая значения функции, вычисленные на некотором множестве точек (на некоторой сетке значений). Для каждого алгоритма, который используется при решении дифференциальных уравнений, Mathcad имеет различные встроенные функции. Несмотря на различные методы поиска решения, каждая из этих функций требует, чтобы были заданы по крайней мере следующие величины, необходимые для поиска решения:

- Начальные условия.
- Набор точек, в которых нужно найти решение.
- Само дифференциальное уравнение, записанное в некотором специальном виде, который будет детально описан ниже.

Рассмотрим, как решить обыкновенное дифференциальное уравнение, используя функцию rkfixed. Функция rkfixed использует для поиска решения метод Рунге-Кутты четвертого порядка. В результате решения получается матрица, имеющая два следующих столбца:

- Первый столбец содержит точки, в которых ищется решение дифференциального уравнения.
- Второй столбец содержит значения найденного решения в соответствующих точках.

Функция rkfixed имеет следующие аргументы:

$$\mathtt{rkfixed}(\mathtt{y}, \mathtt{x}_1, \mathtt{x}_2, \mathtt{npoints}, \mathtt{D}).$$

Здесь $\mathtt{y}$ — вектор начальных условий размерности $n$, где $n$ — порядок дифференциального уравнения или число уравнений в системе (если решается система уравнений). Для дифференциального уравнения первого порядка вектор начальных значений вырождается в одну точку $y_0 = y(x_1)$. $\mathtt{x}_1$, $\mathtt{x}_2$ — граничные точки интервала, на котором ищется решение дифференциальных уравнений. Начальные условия, заданные в векторе $\mathtt{y}$, — это значение решения в точке $\mathtt{x}_1$. $\mathtt{npoints}$ — число точек (не считая начальной точки), в которых ищется приближенное решение. При помощи этого аргумента определяется число строк $(1 + \mathtt{npoints})$ в матрице, возвращаемой функцией rkfixed. $\mathtt{D}(\mathtt{x}, \mathtt{y})$ — функция, возвращающая значение в виде вектора из $n$ элементов, содержащих первые производные неизвестных функций.

Наиболее трудная часть решения дифференциального уравнения состоит в определении функции $\mathtt{D}(\mathtt{x}, \mathtt{y})$, которая содержит вектор первых производных от неизвестных функций. В рассматриваемом ниже примере было достаточно просто разрешить уравнение относительно первой производной, и определить функцию $\mathtt{D}(\mathtt{x}, \mathtt{y})$. Иногда, особенно в случае нелинейных дифференциальных уравнений, это может быть трудно. В таких случаях иногда удаётся разрешить уравнение относительно в символьном виде и подставить это решение в определение для функции $\mathtt{D}(\mathtt{x}, \mathtt{y})$. Используйте для этого команду “Решить относительно переменной” из меню “Символика”.

**Пример 8.** Найти решение дифференциального уравнения

$$y'(x) - y^2(x) = x^2$$

на отрезке $[0; 0{,}5]$ с начальным условием $y(0) = 0$.

*Решение.*
1. Вводим начальное условие, начало $a$ и конец $b$ интервала решения, число шагов $n$:

$$\mathsf{y}_0 := 0 \quad \mathsf{a} := 0 \quad \mathsf{b} := 0.5 \quad \mathsf{n} := 10$$

2. Вводим правую часть уравнения:

$$\mathtt{F}(\mathtt{x}, \mathtt{y}) := \mathtt{x}^2 + (\mathtt{y}_0)^2$$

3. Определяем шаг интегрирования:

$$\mathtt{h} := \frac{\mathtt{b}-\mathtt{a}}{\mathtt{n}} \quad \mathtt{h} = 0.05$$

4. Находим решение с использованием встроенной функции rkfixed:

$$\mathtt{Y} := \mathtt{rkfixed}(\mathtt{y}, \mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{n}, \mathtt{F})$$

5. Выводим матрицу решений уравнения:

$$\mathtt{Y} =$$

6. Строим график функции решения уравнения. В качестве аргумента функции необходимо ввести $\mathtt{Y}^{\langle 0 \rangle}$, а в качестве функции — $\mathtt{Y}^{\langle 1 \rangle}$.

## 6. Чтение и запись данных

Mathcad читает и записывает файлы данных — файлы ASCII, содержащие числовые данные. Читая файлы данных, можно брать данные из различных источников и анализировать их в Mathcad. Записывая файлы данных, можно экспортировать результаты Mathcad в текстовые процессоры, электронные таблицы и другие прикладные программы.

Mathcad включает набор функций для чтения и записи данных: READPRN, WRITEPRN и APPENDPRN считывают целую матрицу из файла со строками и столбцами данных или записывают в виде такого файла матрицу из Mathcad.

*Чтение данных* производится с помощью команды READPRN. Процедура READPRN(file) осуществляет присваивание матрице значений из структурированного файла с именем file (структурированные файлы имеют расширение prn). *Структурированные файлы* содержат числа, размещенные в виде прямоугольной матрицы (т. е. по строкам и столбцам) и разделенные пробелами или запятыми. При этом размер матрицы устанавливается в соответствии с объемом файла. Копирование данных из файла производится построчно. Каждой строке матрицы соответствует строка файла.

**Пример 9.**
`A := READPRN("c :\Program Files\Mathcad\qsheet\zscore.prn")`

*Для записи данных в файл* следует воспользоваться функцией WRITEPRN. Функция WRITEPRN(file) выводит матрицу в структурированный файл file.prn.

**Пример 10.**

$\mathtt{ORIGIN} := 1$

$\mathtt{i} := 1 \,..\, 10$

$\mathtt{x_i} := \mathtt{i}!$

$\mathtt{WRITEPRN}(\text{"D :\\Public\\dav\\file1.prn"}) := \mathtt{x}$

**Пример 11.**

$\mathtt{ORIGIN} := 1$

$\mathtt{file2} := \text{"D :\\Public\\dav\\file2.prn"}$

$\mathtt{i} := 1 \,..\, 10$

$\mathtt{j} := 1 \,..\, 8$

$\mathtt{Y_{i,j}} := \sin(\mathtt{i} - \mathtt{j})$

$\mathtt{WRITEPRN}(\mathtt{file2}) := \mathtt{Y}$

*Для добавления данных к существующему файлу на диске* используется функция APPENDPRN. Функция APPENDPRN(file) добавляет матрицу к существующему на диске структурированному файлу file.prn. Следует особо отметить, что число столбцов в матрице должно быть равно числу столбцов в файле.

**Пример 12.**

$\mathtt{k} := 0 \,..\, 8$

$\mathtt{Z_k} := \mathtt{k} + 2$

$\mathtt{APPENDPRN}(\mathtt{file2}) := \mathtt{Z}^{\mathrm{T}}$

## Приложение

### Некоторые встроенные функции Mathcad

Обозначения: `x` и `y` — вещественные числа; `z` — вещественное либо комплексное число; `m`, `n`, `i`, `j`, `k` — целые числа; `v` и все имена, начинающиеся с `v` — векторы; `A` и `B` — матрицы либо векторы; `M` — квадратная матрица.

## Элементарные функции

| | |
|---|---|
| sin(z) — синус | asin(z) — арксинус |
| cos(z) — косинус | acos(z) — арккосинус |
| tan(z) — тангенс | atan(z) — арктангенс |
| cot(z) — котангенс | ln(z) — натуральный логарифм |
| exp(z) — экспонента | log(z) — десятичный логарифм |

## Другие функции

Re(z) — действительная часть комплексного числа z.
Im(z) — мнимая часть комплексного числа z.
arg(z) — аргумент комплексного числа z (в радианах).
$\delta(x, y)$ — символ Кронекера (1, если $x = y$, и 0, если $x \neq y$; x и y — целочисленные величины.
Ф(x) — функция Хевисайда (1, если $x \geqslant 0$, и 0 в противном случае).
ceil(x) — наименьшее целое, не превышающее x.
floor(x) — наибольшее целое число, меньшее или равное x.
mod(x, modulus) — остаток от деления x по модулю. Аргументы должны быть действительными. Результат имеет такой же знак, как и x.
if(cond, x, y) — x, если cond больше 0, иначе y.
until(выражение1, выражение2) — выражение1, пока выражение2 отрицательное.

## Функции для матриц и векторов

augment(A, B) — присоединение матрицы B к матрице A справа; обе матрицы должны иметь одинаковое число строк.
cols(A) — число столбцов в матрице A.
csort(A, n) — сортировка матрицы A по столбцу n (перестановка строк по возрастанию значений элементов в столбце n).
submatrix(A, ir, jr, ic, jc) — выделение из матрицы A субматрицы, состоящей из элементов, содержащихся в строках с ir по jr и в столбцах с ic по jc. Для сохранения порядка строк и столбцов необходимо, чтобы $ir \leqslant jr$, $ic \leqslant jc$.
diag(v) — диагональная матрица, элементы главной диагонали которой - вектор v.
identity(n) — единичная квадратная матрица размером n.
last(v) — индекс последнего элемента вектора v.
lenght(v) — число элементов в векторе v.
matrix(m, n, f) — матрица, в которой (i, j)-й элемент содержит f(i, j), где $i = 0, 1, \ldots, m$ и $j = 0, 1, \ldots, n$.
max(A) — наибольший элемент матрицы A.
mean(v) — среднее значение вектора v.

`median(v)` — медиана.
`min(A)` — наименьший элемент матрицы `A`.
`norme(M)` — евклидова норма матрицы `M`.
`rank(A)` — ранг матрицы `A`.
`reverse(v)` — перевернутый вектор `v`.
`rows(A)` — число строк в матрице `A`.
`rsort(A,n)` — сортировка матрицы `A` по строке `n` (перестановка столбцов по возрастанию значений элементов в строке `n`).
`sort(v)` — сортировка вектора `v` по убыванию.
`stack(A,B)` — формирование матрицы путем расположения `A` над `B`. Матрицы `A` и `B` должны иметь одинаковое число столбцов.
`stdev(v)` — среднеквадратическое отклонение элементов вектора `v`.
`tr(M)` — след матрицы `M` (сумма элементов, расположенных на главной диагонали квадратной матрицы `M`).
`var(v)` — дисперсия (вариация) элементов вектора `v`.
`hist(intervals,data)` — гистограмма. Вектор `intervals` задает границы интервалов в порядке возрастания; `data` — массив данных. Возвращает вектор, содержащий число точек из `data`, попавших в соответствующий интервал.

## Встроенные операторы

| Оператор | Обозначение | Клавиша | Описание |
|---|---|---|---|
| Круглые скобки | (X) | ’ | Группа операторов |
| Нижний индекс | $A_n$ | [ | Возвращение индексированного элемента массива |
| Верхний индекс | $A^{<n>}$ | [Ctrl]6 | Выбор колонки $n$ из массива $A$. Возврат вектора |
| Факториал | $n!$ | ! | Возвращает $n!$. Целое число $n$ не может быть отрицательным |
| Транспонировать | $A^{\text{т}}$ | [Ctrl]1 | Выполняет транспонирование матрицы (вектора) |
| Степень | $z^w$ | ˆ | Возводит $z$ в степень $w$ |
| Степень матрицы, инверсная матрица | $M^n$ | ˆ | Возводит матрицу $M$ в степень $n$, $n$ — целое |
| Сумма вектора | $\sum V$ | [Ctrl]4 | Сумма элемента вектора $V$; возвращение скаляра |
| Квадратный корень | $\sqrt{z}$ | \ | Квадратный корень для неотрицательного $z$; абсолютная величина для отрицательного или комплексного $z$ |

| Оператор | Обозначение | Клавиша | Описание |
|---|---|---|---|
| Корень $n$-ой степени | $\sqrt[n]{z}$ | [Ctrl]\ | Возвращает действительное значение корня всякий раз, когда это возможно |
| Размер (модуль) | $\|z\|$ | \| | Возвращение $\sqrt{\mathrm{Re}^2(z)+\mathrm{Im}^2(z)}$ |
| Размер вектора | $\|v\|$ | \| | Возвращение $\sqrt{(v,v)}$ |
| Деление | $X/z$ | / | Деление выражения $X$ на скаляр $z$, не равный нулю. Если $X$ является массивом, то делит каждый элемент массива на $z$ |
| Умножение | $X\cdot Y$ | * | Произведение скаляров $X$ и $Y$, если как $X$, так и $Y$ — скаляры . Умножает каждый элемент $Y$ на $X$, если $Y$ — массив и $X$ — скаляр. Умножение матриц (векторов), если $X$ и $Y$ — подобные матрицы (векторы) |
| Суммирование | $\sum\limits_{i=m}^{n} X$ | [Ctrl][Shift]4 | Выполнить сложение $X$ для $i=m,m+1,\ldots,n$. $X$ может быть любым выражением |
| Произведение | $\prod\limits_{i=m}^{n} X$ | [Ctrl][Shift]3 | Выполнить умножение $X$ для $i=m,m+1,\ldots,n$. $X$ может быть любым выражением |
| Детерминант | $\|M\|$ | \| | Возвращение определителя квадратной матрицы $M$ |
| Интеграл | $\int\limits_a^b f(t)\,dt$ | [Shift]7 | Вычисляет определенный интеграл $f(t)$ на интервале $[a,b]$, $a$ и $b$ должны быть реальными скалярами. Переменные в выражении $f(t)$, исключая переменную интегрирования $t$, должны быть определены |

| Оператор | Обозначение | Клавиша | Описание |
|---|---|---|---|
| Производная | $\frac{d}{dt}f(t)$ | [Shift]/ | Возвращает $f'(t)$. Все переменные в $f(t)$ должны быть определены, переменная $t$ должна иметь скалярное значение |
| Производная $n$-го порядка | $\frac{d^n}{dt^n}f(t)$ | [Ctrl][Shift]/ | Вычисляет $f^{(n)}(t)$. Все переменные в $f(t)$ должны быть определены, переменная $t$ должна иметь скалярное значение, $n = 0, 1, 2, \ldots$ |
| Сложение | $X + Y$ | $+$ | Скалярное сложение, если $X$ и $Y$ являются скалярами. Сложение элементов, если $X$ и $Y$ — матрицы одинакового размера. Если $X$ — массив, $Y$ — скаляр, складывает $Y$ с каждым элементом $X$ |
| Вычитание | $X - Y$ | $-$ | Скалярное вычитание, если $X$ и $Y$ являются скалярами. Вычитание элементов, если $X$ и $Y$ — матрицы одинакового размера. Если $X$ является массивом и $Y$ — скаляром, вычитает $Y$ из каждого элемента $X$ |
| Больше, чем | $x > y$ | $>$ | Возвращение 1, если $x > y$, иначе 0; $x$ и $y$ должны быть скалярами. |
| Меньше, чем | $x < y$ | $<$ | Возвращение 1, если $x < y$, иначе 0; $x$ и $y$ должны быть скалярами |
| Больше, чем или равно | $x \geq y$ | [Ctrl]0 | Возвращение 1, если $x \geq y$, иначе 0; $x$ и $y$ должны быть скалярами |
| Меньше, чем или равно | $x \leq y$ | [Ctrl]9 | Возвращение 1, если $x \leq y$, иначе 0; $x$ и $y$ должны быть скалярами |
| Не равно | $z \neq w$ | [Ctrl]3 | Возвращение 1, если $z \neq w$, иначе 0; $z$ и $w$ должны быть скалярами |
| Равно | $z = w$ | [Ctrl]= | Возвращение 1, если $z = w$, иначе 0; $z$ и $w$ должны быть скалярами. Появляется на экране отчетливо как знак равенства |

## ПРЕДОПРЕДЕЛЕННЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ

Ниже приведены предопределенные переменные Mathcad с их значениями по умолчанию.

| | |
|---|---|
| $\pi$=3.14159... | Число $\pi$. В численных расчетах Mathcad использует значение $\pi$ с учетом 15 значащих цифр. Чтобы напечатать $\pi$, нажмите [Ctrl][Shift]P |
| $e$=2.71828... | Основание натуральных логарифмов. В численных расчетах Mathcad использует значение $e$ с учетом 15 значащих цифр |
| $\infty$ | Бесконечность. В численных расчетах это заданное большое число ($10^{307}$). Чтобы напечатать $\infty$, нажмите [Ctrl][Shift]Z |
| %=0.01 | Процент. Используйте его в выражениях, подобных 10·% |
| TOL=$10^{-3}$ | Допускаемая погрешность для различных алгоритмов аппроксимации (интегрирования, решения уравнений и т. д.) |
| ORIGIN=0 | Начало массива. Определяет индекс первого элемента массива |
| PRNCOLWIDTH=8 | Ширина столбца, используемая при записи файлов функцией WRITEPRN |
| PRNPRECISION=4 | Число значащих цифр, используемых при записи файлов функцией WRITEPRN |

## Литература

*Основная литература*

1. *Вентцель Е. С.* Исследование операций: Задачи, принципы, методология / Е. С. Вентцель. — М.: Наука, 2001. — 207 с.
2. Вероятность и математическая статистика: Энциклопедия / Гл. ред. А. М. Прохоров. — М.: Большая Российская эниклопедия, 1999. — 910 с.
3. Вероятностные разделы математики. Учебник для бакалавров технических направлений / Под ред. Ю. Д. Максимова — СПб.: «Иван Федоров», 2001. — 592 с.
4. *Плис А. И.* Mathcad 2000. Математический практикум для экономистов и инженеров. Учеб. пособие /А. И. Плис, Н. А. Сливина. — М.: Финансы и статистика, 2000. — 656 с.
5. *Гурский Д. А.* Вычисление в MathCAD / Д. А. Гурский. — Минск: Новое знание, 2003. — 814 с.

*Дополнительная литература*

6. *Вентцель Е. С.* Теория случайных процессов и ее инженерные приложения / Е. С. Вентцель, А. А. Овчаров. — М.: Наука, 1991. — 320 с.
7. *Ивченко Г. И.* Теория массового обслуживания / Г. И. Ивченко, В. А. Каштанов, И. Н. Коваленко. — М.: Высш. школа, 1982. — 256 с.
8. *Клейнрок Л.* Теория массового обслуживания / Л. Клейнрок. — М.: Машиностроение, 1979. — 520 с.
9. Mathcad 6.0 Plus. Финансовые, инженерные и научные расчеты в среде Windows 95. — М.: Информ.-издат. дом “Филинъ”, 1996. — 712 с.
10. *Дьяконов В. П.* Справочник по Mathcad PLUS 6.0 PRO / В. П. Дьяконов. — М.: “СК Пресс”, 1997. — 336 с.

Для заметок

Составители: Радченко Татьяна Антониновна,
Дылевский Александр Вячеславович
Редактор Тихомирова О. А.